Revisão: Conservação da energia (1ª lei da termodinâmica) para volume de controle

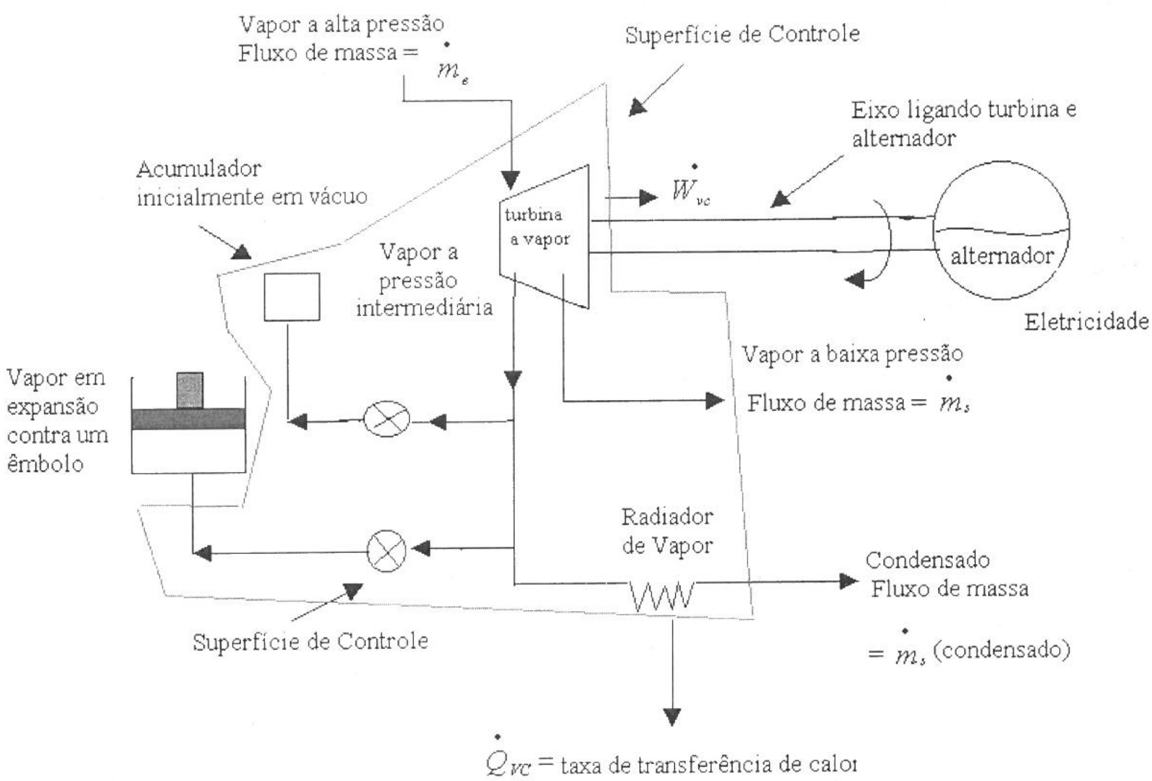


Fig. 3 - Troca e acumulação de massa e energia num volume de controle

Para várias entradas e saídas, a primeira lei da Termodinâmica para o volume de controle, podemos escrever:

$$\dot{Q}_{VC} + \Sigma \dot{m}_e \left(h_e + \frac{V_e^2}{2} + g z_e\right) = \frac{dE_{vc}}{dt} + \Sigma \dot{m}_s \left(h_s + \frac{V_s^2}{2} + g z_s\right) + \dot{W}_{vc} \quad (4.5)$$

Esta é a equação da energia genérica ou a primeira lei para volume de controle, i.e. para sistema aberto.

Energia em termos de fluxo (taxa) para sistema fechado

A equação genérica (4.5) para um sistema fechado onde não há fluxo de massa (continuidade de escoamento) entrando ao volume de controle ou saindo do volume de controle, reduz-se

$$\dot{Q} = \frac{dE}{dt} + \dot{W} \quad (4.5.1)$$

Energia para escoamento em regime permanente

Regime permanente: Quando as propriedades não variam em função do tempo. i.e.

$$\frac{dE_{VC}}{dt} = 0$$

A equação (4.5) torna-se:

$$\dot{Q}_{VC} + \Sigma\dot{m}_e\left(h_e + \frac{V_e^2}{2} + gz_e\right) = \Sigma\dot{m}_s\left(h_s + \frac{V_s^2}{2} + gz_s\right) + \dot{W}_{vc} \qquad (4.5.2)$$

Energia para escoamento em regime permanente com única entrada e única saída

Equação da Continuidade: $\Sigma\dot{m}_e = \dot{m}_e = \Sigma\dot{m}_s = \dot{m}_s = \dot{m} = cte.$

1ª lei: $\dot{Q}_{VC} + \dot{m}\left(h_e + \frac{V_e^2}{2} + gz_e\right) = \dot{m}\left(h_s + \frac{V_s^2}{2} + gz_s\right) + \dot{W}_{vc}$ (4.5.3)
em J/S=W

Esta equação é aplicada em qualquer acessório térmico (Bomba, compressor, ventilador, turbina, condensador, evaporador, trocador de calor, aquecedor, resfriador, caldeira, bocal, difusor, tubulação, válvula de expansão, coletor solar, etc, etc.), quando a vazão em massa $(\dot{m})$ é conhecida.

Energia ou a 1ª lei na unidade de massa

Dividindo a equação (4.5.3) por $\dot{m}$ (kg/s)

$$\frac{\dot{Q}_{VC}}{\dot{m}} + \frac{\dot{m}}{\dot{m}}\left(h_e + \frac{V_e^2}{2} + gZ_e\right) = \frac{\dot{m}}{\dot{m}}\left(h_s + \frac{V_s^2}{2} + gZ_s\right) + \frac{\dot{W}_{VC}}{\dot{m}}$$

tem-se:

$$q_{VC} + \left(h_e + \frac{V_e^2}{2} + gZ_e\right) = \left(h_s + \frac{V_s^2}{2} + gZ_s\right) + \omega_{VC} \quad \left[{}^{J}/_{Kg}, {}^{Kcal}/_{Kg}\right] \quad (4.5.4)$$

Esta equação é também aplicada em qualquer acessório térmico (como anteriormente), quando a vazão em massa ($\dot{m}$) é desconhecida.

Energia ou a 1ª lei na forma diferencial

Tomando diferencial ambos os lados da equação (4.5.4) tem-se:

$$\partial q_{VC} = dh + d\left(V^2/2\right) + gdZ + \partial\omega_{VC}$$
$$= d(u + Pv) + d\left(V^2/2\right) + gdZ + \partial\omega_{VC}$$

$$\partial q_{VC} = du + Pdv + vdP + d\left(V^2/2\right) + gdZ + \partial\omega_{VC} \quad \text{[J/kg] ou } [m^2/s^2] \quad (4.5.5)$$

Esta forma diferencial explica a 1ª lei com escoamento em regime permanente.

Onde:

∂q_{VC} = Calor infinitesimal fornecido ao volume de controle ou calor rejeitado ou perda de calor do volume de controle;

du = Variação infinitesimal da energia interna específica;

P dυ = Trabalho de deslocamento (expansão e/ou compressão) pelo sistema aberto (V.C.);

υ dP = Trabalho de escoamento (devido a diferença de pressão);

$d(V^2/2)$ = Variação infinitesimal da energia cinética específica;

g dZ = Variação infinitesimal da energia potencial específica vezes a gravidade;

$\partial\omega_{VC}$ = Trabalho infinitesimal (trabalho de eixo) produzido ou gasto pelo volume de controle (sistema aberto).

Energia ou a 1ª lei na forma diferencial reduz-se para sistema fechado

$$\partial q_{VC} = du + Pdv + vdP + d\left(V^2/2\right) + gdZ + \partial\omega_{VC} \quad \text{[J/kg] ou } [m^2/s^2] \quad (4.5.5)$$

Quando:

1) Não há escoamento: υ dP = 0, V = 0
2) Não há diferença em energia potencial específica, g dZ = 0
3) Não há trabalho de eixo produzido ou gasto, $\partial\omega_{VC} = 0$

$$\partial q = du + Pdv \;\; ou \;\; \partial q = dh - vdP \quad (4.5.6) \text{ [J/kg] ou } [m^2/s^2]$$

Esta é a 1ª lei para sistema fechado.

Lembrando da equação (3.1.3c) da 1ª Lei da Termodinâmica para uma mudança de Estado=> ${}_1Q_2 = U_2 - U_1 + m(\frac{V_2^2}{2} - \frac{V_1^2}{2}) + mg(Z_2 - Z_1) + {}_1W_2$. [J] ou

${}_1Q_2 = E_2 - E_1 + {}_1W_2$. [J], onde E_1 e E_2 são os valores inicial e final da energia total do sistema.

Equação de Bernoulli: Um caso específico da 1ª lei

Vamos utilizar a equação (4.5.4)

$$q_{VC} + \left(h_e + \frac{V_e^2}{2} + gZ_e\right) = \left(h_s + \frac{V_s^2}{2} + gZ_s\right) + \omega_{VC} \quad \left[{}^{J}/_{Kg}, {}^{Kcal}/_{Kg}\right] \quad (4.5.4)$$

ou $q_{VC} = (h_s - h_e) + \frac{V_s^2 - V_e^2}{2} + g(Z_s - Z_e) + \omega_{VC}$

ou $-\omega_{VC} = (u + Pv)_s - (u + Pv)_e + \frac{V_s^2 - V_e^2}{2} + g(Z_s - Z_e) - q_{VC}$

ou $\boxed{-\omega_{VC} = P_s v_s - P_e v_e + \frac{V_s^2 - V_e^2}{2} + g(Z_s - Z_e) + (u_s - u_e - q_{VC})}$ (4.5.4a)

Esta equação ainda é uma forma da 1ª lei.

Considerando, na Equação (4.5.4a), as seguintes hipóteses, vem que:

1) Quando não há o trabalho de eixo tem-se $-\omega_{VC} = 0$;

2) Fluido seja incompressível υ_s [m³/kg] = υ_e [m³/kg] = υ [m³/kg] = $1/\rho$[kg/m³];

3) Fluido seja ideal (não viscoso: μ [Pa s] = 0), tem-se, perda de carga (perda de energia mecânica) causada pela viscosidade = 0 = $(u_s - u_e - q_{vc})$ <= chamada de perda de carga.

$$\therefore \boxed{\frac{P_s - P_e}{\rho} + \frac{V_s^2 - V_e^2}{2} + g(Z_s - Z_e) = 0} \quad (4.5.7) \text{ Equação de Bernoulli}$$

Notas: p/ fluido real (viscoso: $\mu > 0$)

- A Termodinâmica não dá o valor de $(u_s - u_e - q_{vc})$, porque não existe nenhum aparelho que consiga medir separadamente os termos $(u_s - u_e)$ e $-q_{vc}$.
- A mecânica dos fluidos consegue medir o efeito global através dos parâmetros fluido dinâmicos.

Problemas Resolvidos

Exemplos da 1ª lei da termodinâmica para V.C.

Exemplo 1:

Considere a instalação a vapor elementar, mostrada na figura. Os dados seguintes referem-se a tal instalação:

Localização	Pressão (kgf/cm^2)	Título ou temperatura (°C)
Saída do gerador de vapor	20	320
Entrada da turbina	18,5	290
Saída da turbina, entrada do condensador	0,15	X = 93%
Saída do condensador, entrada da bomba	0,13	40

Trabalho da bomba = 1,7 kcal/kg

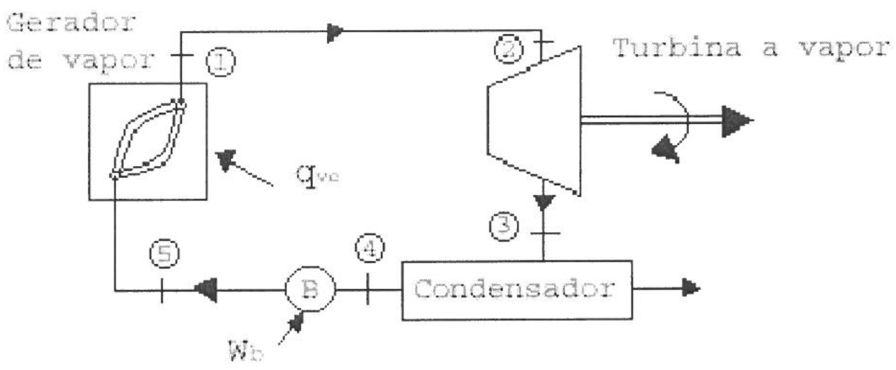


Figura – Instalação motora simples a vapor d´água.

Pede-se: Determine as seguintes quantidades por kg de fluido (ou [J/kg]) que escoa através da instalação:

a) Calor transferido ${}_1q_2$ na linha entre o gerador de vapor (caldeira) e a turbina ⇒ entre 1 e 2 (tubulação);
b) Trabalho produzido ${}_2w_3$ pela turbina ⇒ entre 2 e 3 (w_{vc});
c) Calor transferido ${}_3q_4$ no condensador ⇒ entre 3 e 4 (q_{vc});
d) Calor transferido ${}_5q_1$ no gerador de vapor ⇒ entre 5 e 1 ($q_{vc(cald)}$).

Use as tabelas de vapor e/ou o diagrama de Mollier para vapor de água.

Solução:

A equação geral da energia ou a 1ª lei da termodinâmica em regime permanente é:

$$q_{vc} + h_e + \frac{V_e^2}{2g_cJ} + Z_e\frac{g}{g_cJ} = h_s + \frac{V_s^2}{2g_cJ} + Z_s\frac{g}{g_cJ} + w_{vc} \text{ (1), onde:}$$

$$g_c = 9.81\frac{kg.m}{kgf.s^2} \text{ e } J = 427\frac{kgf.m}{kcal}$$

As velocidades e as alturas não são dadas, portanto, as variações da energia cinética e energia potencial são desprezadas. Tem-se, então,

$$q_{vc} + h_e = h_s + w_{vc} \text{ [J/kg] (2) 1ª lei reduzida!}$$

<u>As entalpias nos pontos 1, 2, 3 e 4</u>

<u>Ponto 1</u> $\Rightarrow$ Das tabelas de vapor d'água superaquecido, tem-se, com P_1=20 kgf/cm^2 e T_1=320 °C,
Vapor superaquecido (pág. 493, A.1.3.(a)) $\Rightarrow$ h_1=733,2 kcal/kg
Ou pelo diagrama de Mollier:

h_1=3070 kJ/kg=3070/4,187=733,2 kcal/kg

<u>Ponto 2</u> $\Rightarrow$ P_2=18,5 kgf/cm^2, T_2=290 °C
Vapor superaquecido (pág. 493, A.1.3.(a))
Por interpolação linear

$y = \left(\frac{x-x_1}{x_2-x_1}\right)(y_2 - y_1) + y_1 = \left(\frac{18,5-15}{20-15}\right)(717 - 720,3) + 720,3$, onde h = y e P = x.

Portanto $h_2 \approx$ 717,99 $\approx$ 718 kcal/kg
Ou pelo diagrama de Mollier:

h_2=3010 kJ/kg = 3010/4,187=718,89 kcal/kg

<u>Ponto 3</u> $\Rightarrow$ P_3=0,15 kgf/cm^2, x=93%
Vapor de água saturado: V+L
Tabela de pressão (pág. 481, A.1.2.(a))

h_3=$(1 - x)h_l + xh_v = (1 - 0,93)53,5 + 0,93 * 620,4 \cong 580,7 kcal/kg$

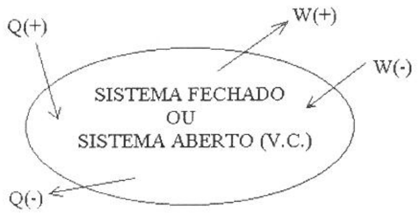
Ou pelo diagrama de Mollier:

h_3=2430 kJ/kg=2430/4,187=580,37 kcal/kg

<u>Ponto 4</u> $\Rightarrow$ P_4 = 0,13 kgf/cm^2, T_4 = 40 °C
Vapor de água saturado: neste problema temos apenas L
Entalpia apenas depende da temperatura <u>também</u> para líquido.
Tabela de temperatura (pág. 476, A.1.1.(a))

$h_4 \approx 39{,}98$ kcal/kg

a) Considerando um volume de controle que inclua a tubulação entre o gerador de vapor e a turbina (ponto 1-2) e a convenção dos sinais de trabalho e calor:



$$q_{cal} + h_1 = h_2 + w$$

Mas w=0, portanto: ${}_1q_2 = h_2 - h_1 = 718 - 733.2 = -15.2\ kcal/kg$

O sinal negativo significa perda de calor pela tubulação.

b) A turbina é essencialmente uma máquina (um acessório) adiabática. Considerando um volume de controle em torno da turbina (ponto 2-3):

$$q_{turb} + h_2 = h_3 + {}_2w_3 \Rightarrow {}_2w_3 = h_2 - h_3 = 718 - 580.7 = +137.3 kcal/kg$$

O sinal positivo significa que o trabalho é produzido!

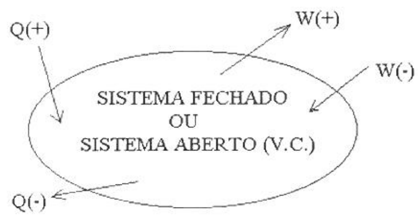
c) Para o condensador o trabalho de eixo é nulo (ponto 3-4):

$$ {}_3q_4 + h_3 = h_4 + w \Rightarrow {}_3q_4 = h_4 - h_3 = 39.98 - 580.7 = -540.72 kcal/kg$$

O sinal negativo significa que o calor é rejeitado!

d) Para o gerador de vapor, o trabalho do eixo é nulo (ponto 5-1):

${}_5q_1 + h_5 = h_1 + w \Rightarrow {}_5q_1 = h_1 - h_5$, onde não se sabe ainda o valor de h_5.



Determinação de h_5:

Considerando um volume de controle em torno da bomba (ponto 4-5), pode-se achar h_5. A bomba é um acessório adiabático e seu trabalho é negativo. Dado no exercício: trabalho da bomba = 1,7 [kcal/kg].

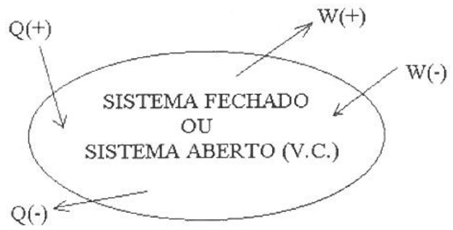
$$ {}_4q_5 + h_4 = h_5 + {}_4w_5 \Rightarrow h_5 = h_4 - {}_4w_5 = 39.98 - (-1.7) = 41{,}68 kcal/kg$$

Portanto: ${}_5q_1 = h_1 - h_5 = 733.2 - 41.68 = 691.52 kcal/kg$

O sinal positivo significa que o calor foi fornecido ao gerador de vapor!

Pode-se calcular o Rendimento η_t desse ciclo como sendo $\eta_t = \frac{\sum w}{q_H} = \frac{w_t + (-w_B)}{q}$.

$$\eta_t = \frac{\sum w}{q_H} = \frac{w_{turbina} + (-w_{Bomba})}{q_H = q_{caldeira}} = \frac{137.3 + (-1.7)}{691.52} = \frac{135.6}{691.52} \Rightarrow \eta_t \approx 19.61\%$$



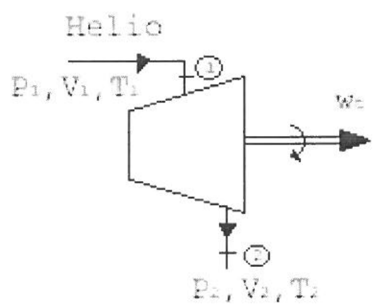
Outro método: $(\sum w = \sum q) \Rightarrow$ 1ª lei para ciclo.

$$\eta_t = \frac{\sum q}{q_H} = \frac{q_{caldeira} + (-q_{condensador}) + (-q_{tububulação})}{q_H = q_{caldeira}} = \frac{691.52 + (-540.72) + (-15.2)}{691.52}$$
$$= \frac{135.6}{691.52}$$
$$\eta_t \cong 19.61\%$$

<u>Exemplo 2:</u>

Hélio é expandido adiabaticamente numa turbina (a gás) de 400 kPa e 260 °C a 100kPa (100 kPa = 1 bar = 10^5 N/m^2 = 0.9869 atm). A turbina é bem isolada e a velocidade na entrada sendo muito pequena, portanto, é desprezada. A velocidade na saída é 200 m/s. Calcule o trabalho produzido (trabalho de eixo) por unidade de massa do hélio no escoamento.

Solução:



Dados: P_1 = 400 kPa, P_2 = 100 kPa, T_1 = 260 °C + 273 = 533 °K, T_2 = ?

$V_1 \approx 0$ m/s, $V_2 \approx 200$ m/s

Da tabela (pág. 538): $k_{hélio}$ = 1.667 [-], $c_{p\ Helio}$ = 1.25 [kcal/(kg K)], sendo: *k* a razão de calores especificos *k* = c_p/c_v, sendo k = 1,4 [-] para gases diatomicos e 1,667 [-] para gases monoatomicos.

O hélio é expandido adiabaticamente. Para o processo adiabático vale:

$$\frac{T_2}{T_1} = \left(\frac{P_2}{P_1}\right)^{\frac{k-1}{k}} \text{ ou } T_2 = T_1\left(\frac{P_2}{P_1}\right)^{\frac{k-1}{k}} = 533\left(\frac{100}{400}\right)^{\frac{1.667-1}{1.667}} \approx 306{,}08\ K$$

$$T_2 \cong 306{,}08\ K$$

Considerando-se o hélio como sendo gás perfeito (considerando que o calor específico a pressão constante é dado por $c_p = \frac{dh}{dT}$), a queda de entalpia na turbina é dada por:

$$\Delta h = h_2 - h_1 = C_p(T_2 - T_1) = 1.25kcal/kg(306.08 - 533)°K \cong -283.65kcal/kg$$

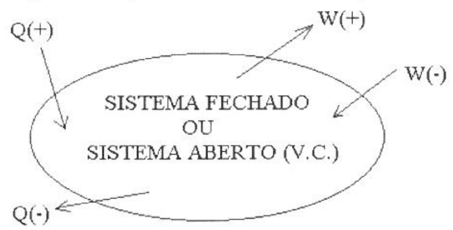
A turbina é isolada (adiabática, q=0), dado que $V_1 \approx 0$ e $V_2 \approx 200$ m/s, e considerando que não exista a variação de energia potencial, ou seja, d(EP) ≈ 0, tem-se, pela 1ª lei:

$$q - w = h_2 - h_1 + \frac{V_2^2 - V_1^2}{2.g_c.J} \Rightarrow 0 - w = -283.65\ kcal/kg + \frac{(200^2 - 0)\ m^2/s^2}{2 * 9.81\frac{kg.m}{kgf.s^2} * 427\frac{kgf.m}{kcal}}$$

Ou $-w \cong -278.88\ kcal/kg$.

Sendo $1\ kcal = 4.187\ KJ$, tem que: $\boxed{w \cong +1167.67\ kJ/kg}$

O sinal positivo significa que o trabalho foi produzido pela turbina!



PROBLEMAS RESOLVIDOS

APLICAÇÃO DA EQUAÇÃO DE BERNOULLI AOS PROBLEMAS DE ENGENHARIA

Problema 1

a) Determinar a velocidade de saída [m/s] do orifício instalado na parede do reservatório da figura 1.

b) Determinar a vazão volumétrica do orifício [m^3/s].

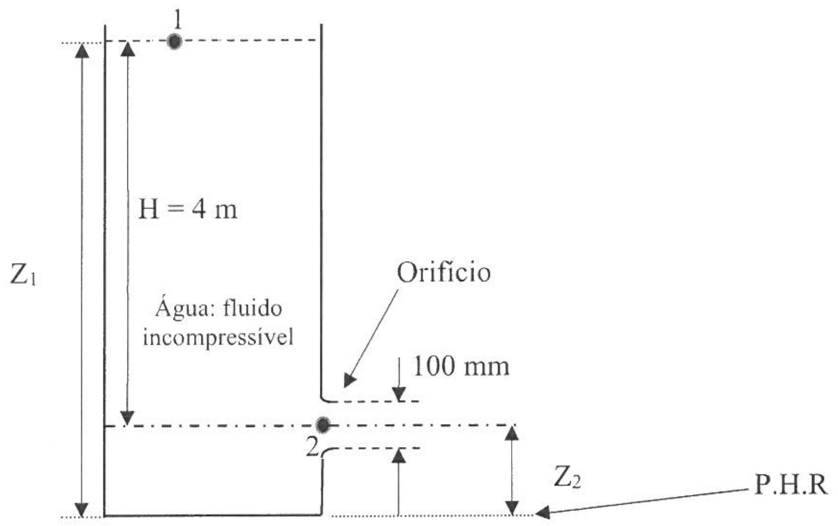


Figura 1 - Escoamento num orifício (bocal) a partir de um reservatório.

Solução

a) Observações:

i) O jato sai com formato cilíndrico submetido à pressão atmosférica, em sua periferia.

ii) A pressão ao longo do seu eixo é também a atmosférica para efeitos práticos.

iii) A equação de BERNOULLI é aplicada entre um ponto 1 da superfície livre da água e em um ponto a jusante 2 do orifício, ou seja:

$$\frac{P_1}{\gamma} + \frac{V_1^2}{2g} + Z_1 = \frac{P_2}{\gamma} + \frac{V_2^2}{2g} + Z_2 \quad (1)$$

ou

$$\frac{V_2^2}{2g} = \frac{P_1 - P_2}{\gamma} + \frac{V_1^2}{2g} + Z_1 - Z_2 \quad (2)$$

Mas $P_1 = P_2 = P_{atm}$. A velocidade na superfície 1 do reservatório é nula (praticamente), $Z_1 - Z_2 = H$. Logo:

$$\frac{V_2^2}{2g} = 0 + 0 + H \therefore V_2 = \sqrt{2gH} \text{ [m/s]}$$

Ou seja:

$$V_2 = \sqrt{2 \times 9{,}806 \times 4} \text{ [m/s]} = 8{,}86 \text{ [m/s]}$$

que estabelece que a velocidade de descarga (V_2) é igual à velocidade de queda livre a partir da superfície do reservatório. Este resultado, $V_2 = \sqrt{2gH}$ [m/s] é conhecido como teorema de TORRICELLI.

b) A vazão volumétrica $\dot{V}$ é igual ao produto da velocidade de descarga pela área do jato.

Sabendo que: diâmetro do jato = 100 [mm] = 0,1 [m]

$$\therefore \dot{V} = A_2 V_2 = \frac{\pi}{4} D_2^2 \text{ x } V_2 = \frac{\pi}{4} \text{ x } (0{,}1)^2 \text{ x } 8{,}86 \text{ [m}^3\text{/s]}$$

$$\therefore \dot{V} \cong 0{,}0696 \text{ m}^3\text{/s} \cong 0{,}07 \text{ m}^3\text{/s} = 70 \text{ [}\ell\text{/s] Resp}$$

Notas

Esta equação de TORRICELLI não é perfeitamente verdadeira porque há uma perda de energia a qual não foi considerada.

A equação prática é:

$$\dot{V} = C_D . A_0 . \sqrt{2 . g . H} \quad (2)$$

Onde C_D = coeficiente de descarga (tem valor entre 0,57 a 0,64)
A_0 = área do orifício.

Problema 2

Um medidor VENTURI consiste de um conduto convergente, seguido de um conduto de diâmetro constante chamado garganta e, posteriormente, de uma porção gradualmente divergente. É utilizado para determinar a vazão num conduto (Fig. 2). Sendo o diâmetro da seção 1 igual a 15,2 cm e o da seção 2 igual a 10,2 cm, determinar a vazão volumétrica no conduto quando $P_1 - P_2 = 0{,}211$ Kgf/cm^2 e o fluido que escoa é óleo com d = 0,90.

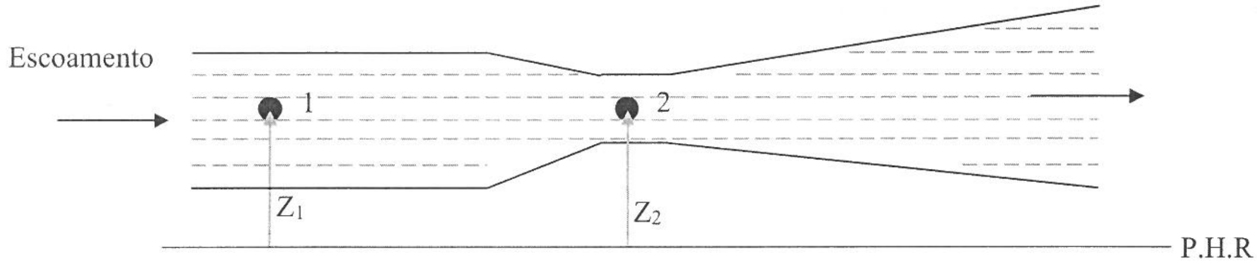


Figura 2 - Medidor VENTURI

Solução

Aplicando-se a equação de BERNOULLI entre pontos 1 e 2 tem-se,

$$\frac{P_1}{\gamma} + \frac{V_1^2}{2g} + Z_1 = \frac{P_2}{\gamma} + \frac{V_2^2}{2g} + Z_2$$

Ou $\frac{V_2^2 - V_1^2}{2g} = \frac{P_1 - P_2}{\gamma} + Z_1 - Z_2$ (1)

Dada a Equação da Continuidade, isolando V_2 e elevando ao quadrado em ambos lados, $A_1V_1 = A_2V_2 = \dot{V}$, tem-se que:

Ou $V_2^2 = \left(\frac{A_1}{A_2}\right)^2 . V_1^2$ (2)

Levando (2) em (1) tem-se,

$$\left[\left(\frac{A_1}{A_2}\right)^2 - 1\right] . \frac{V_1^2}{2g} = \frac{P_1 - P_2}{\gamma} + Z_1 - Z_2 \ (1)$$

$$\therefore \ V_1 = \left[\frac{2g.\left(\frac{P_1 - P_2}{\gamma} + Z_1 - Z_2\right)}{\left(\frac{A_1}{A_2}\right)^2 - 1}\right]^{\frac{1}{2}} \quad (3)$$

e,

$$\dot{V} = A_1.V_1 = A_1.\left[\frac{2g.\left(\frac{P_1-P_2}{\gamma}+Z_1-Z_2\right)}{\left(\frac{A_1}{A_2}\right)^2-1}\right]^{\frac{1}{2}} \qquad (4)$$

Aqui, a área na seção 1 é dada por: $A_1 = \frac{\pi}{4} D_1^2 = \frac{\pi}{4}.(15,2 \times 10^{-2}\ m)^2 = 0,0181531\ [m^2]$

A área na seção 2 é dada por: $A_2 = \frac{\pi}{4} D_2^2 = \frac{\pi}{4}.(10,2 \times 10^{-2}\ m)^2 = 0,0081745\ [m^2]$

Dividindo A_1 por A_2 e elevando ao quadrado vem que:

$$(A_1/A_2)^2 = 4,9315018.$$

A diferença de pressão foi dada, sendo: $P_1 - P_2 = 0,211\ [Kgf/cm^2] = 0,211 \times 10^4\ [Kgf/m^2]$.

A variação da energia potencial é nula: $\Delta H = Z_1 - Z_2 = 0$.

A aceleração da gravidade é dada: $g = 9,806\ [m/s^2]$.

Sabe-se que a densidade é definida como: $d_{óleo} = \frac{\rho_{óleo}}{\rho_{água\ a\ 4ºC}} \frac{g}{g} = \frac{\gamma_{óleo}}{\gamma_{água\ a\ 4ºC}} = 0,90$ ou

$$\gamma_{óleo}\left[\frac{N}{m^3}\right] = \gamma_{água\ a\ 4ºC}.d_{óleo}$$

$$\gamma_{óleo} = 1000\ Kgf/m^3 \times 0,90 = 900\ Kgf/m^3$$

$$\therefore\ \dot{V} = A_1.V_1 = A_1.\left[\frac{2g.\left(\frac{P_1-P_2}{\gamma}+Z_1-Z_2\right)}{\left(\frac{A_1}{A_2}\right)^2-1}\right]^{\frac{1}{2}} = 0,0181531.\left[\frac{2.9,806.\left(\frac{0,211\times10^4}{900}+0\right)}{4,9315018-1}\right]^{\frac{1}{2}} \cong 0,0621\left[\frac{m^3}{s}\right]$$

ou seja

$$\therefore \boxed{\dot{V} \cong 0,0621\ [m^3/s] \cong 62,1\ [\ell/s]}\ \text{Resp}$$

Notas

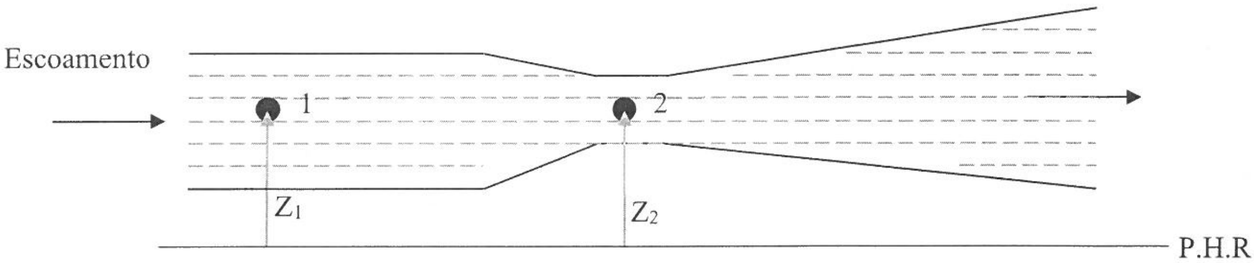


Figura 2 - Medidor VENTURI

Há uma perda de energia na seção convergente, portanto, um coeficiente de descarga deve ser introduzido na equação de BERNOULLI. Da Equação (4) e introduzindo C_d, vem:

$$\dot{V} = C_d . A_1 . \left[\frac{2g.\left(\frac{P_1 - P_2}{\gamma} + Z_1 - Z_2\right)}{\left(\frac{A_1}{A_2}\right)^2 - 1} \right]^{\frac{1}{2}}$$

onde C_d = Coeficiente de descarga = 0,89 a 0,99

C_d será 0,98 a 0,99 se:

1) Escoamento for turbulento (número de *Reynolds**, $Re = \frac{\rho.V.D}{\mu} = \frac{V.D}{\nu} \geq 10000$)

* O número de *Reynolds* é a razão entre forças inerciais e forças viscosas. Também pode ser visto como uma razão de forças de cisalhamento turbulentas e forças de cisalhamento viscoso. Um número "crítico" de Reynolds distingue entre regimes de fluxo, como fluxo laminar ou turbulento em tubulações, na camada limite ou em torno de objetos imersos. O valor particular depende da situação.

$$Re = \frac{Resistência\ inercial}{Resistência\ viscosa}$$

2) Não tiver válvula ou curvatura dentro de 20 diâmetros (20 x D_1 = 0,152 [m] = 3,04 [m]) da montante (entrada) do medidor Venturi.

Problema 3

O dispositivo mostrado pela Figura 3 é utilizado para determinar a velocidade do líquido no ponto 1. É constituído de um tubo, cuja extremidade inferior é dirigida para montante e cujo ramo vertical é aberto à atmosfera. O impacto, na abertura 2, força o mesmo a subir no ramo vertical a uma altura h acima da superfície livre. Determinar a velocidade no ponto 1.

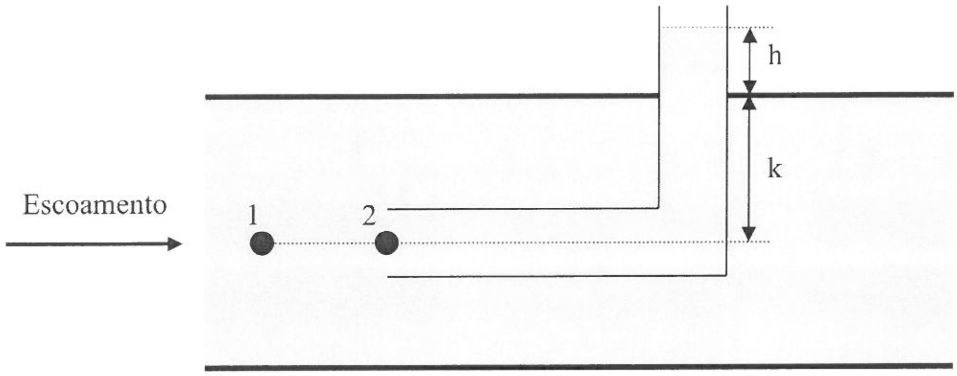


Figura 3 - Tubo de Pitot

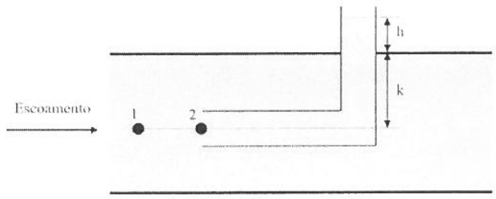
Solução:

O ponto 2 é um ponto de estagnação, onde a velocidade do escoamento anula-se ($V_2 \cong 0$). Este fato cria uma pressão devida ao impacto, chamada pressão dinâmica, que força o fluido no ramo vertical. Escrevendo-se equação da energia (BERNOULLI) entre os pontos 1 e 2 e desprezando-se as perdas, que são muito pequenas, teremos:

$$\frac{P_1}{\gamma} + \frac{V_1^2}{2g} + Z_1 = \frac{P_2}{\gamma} + \frac{V_2^2}{2g} + Z_2 \text{ [m]}$$

Mas $Z_1 = Z_2$ e $V_2 \cong 0$

$$\therefore \quad \frac{V_1^2}{2g} = \frac{P_2 - P_1}{\gamma}$$



$\frac{P_1}{\gamma}[m]$ é dado pela altura do fluido acima do ponto 1 e é igual k em metros do fluido que escoa.

$\frac{P_2}{\gamma}[m]$ é dado pelo piezômetro e vale (k + h), desprezando o efeito capilar.

Substituindo esses valores na equação $\frac{V_1^2}{2g} = \frac{P_2 - P_1}{\gamma}$,

$$\frac{V_1^2}{2g} = k + h - k, \text{ ou seja, } \boxed{V_1 = \sqrt{2.g.h}\ \text{[m/s]}}\ (1)$$

Este é o tubo de Pitot numa forma simplificada.

A equação (1), $V_1 = \sqrt{2.g.h}$ [m/s], tem a mesma expressão do Teorema de TORRICELLI e fornece a velocidade de corrente líquida na entrada do Tubo de Pitot.

Exercícios Propostos envolvendo a Equação de Bernoulli:

Questão 1:

Com o tubo de Pitot mede-se a velocidade da água no centro de um conduto com 25 [cm] (0,25 [m]) de diâmetro (Fig 1). A diferença de carga é h = 0,1 [mca]. Devido ao grande diâmetro, supõe-se que a velocidade média da água neste tubo corresponde a 2/3 da velocidade no seu centro. Calcular a vazão volumétrica em [m^3/s] e em [ℓ/s].

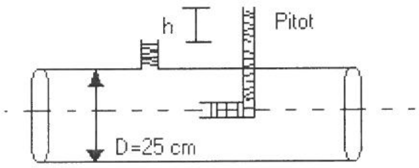
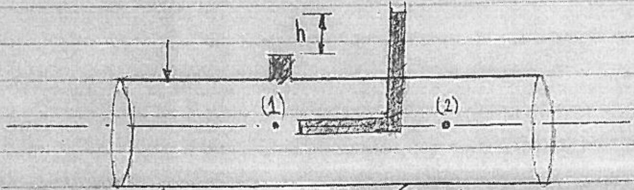


Fig1 – Tubo de Pitot

Resp.: V' ≈ 0.0456 [m^3/s] = 45.6 [litros/s]

Questão 1) Aplicação Bernoulli

Com o Tubo de Pitot mede-se a Velocidade de H_2O no centro de um Conduto com 25 cm (0,25 m) de diâmetro figura (1). A diferença de carga é $h = 0,1$ mca. Devido ao grande diâmetro, supõe-se que a Velocidade média da H_2O neste Tubo corresponde a 2/3 da Velocidade no seu centro. Calcular a Vazão Volumétrica em m^3/s e em L/s.



D = 0,25 m   Figura (1) Tubo de Pitot

Resposta $Q \cong 0,00456\ m^3/s = 45,6\ L/s$

Solução:

$Q = A\bar{v}$ $V_1 = \sqrt{2gh} = \sqrt{2 \times 9,81\ m/s^2 \times 0,1\ m} = 1,4007\ m/s$

$\bar{v} = 2/3\ V_1$
↳ velocidade média

$h = 0,1$ mca

$$\bar{v} = (2/3)V_1 = (2/3)\ 1,4007\ m/s = 0,9338\ m/s$$

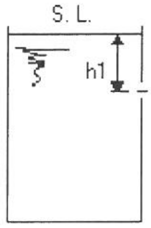
$$Q = A\bar{v} = \left(\frac{\pi D^2}{4}\right)\bar{v} = \left(\frac{\pi (0,25\ m)^2}{4}\right) 0,9338\ m/s$$

$$Q = 0,0458\ \cancel{m^3}/s \times \frac{10^3\ L}{1\ \cancel{m^3}} = \boxed{45,8\ L/s}$$

$$\boxed{0,0458\ m^3/s}$$

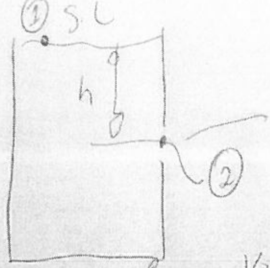
Questão 2:

O centro de um orifício circular está 8,5 [m] abaixo da superfície livre (S.L. constante) de um reservatório. Determinar o diâmetro deste orifício para que a vazão seja de 25,34 [ℓ/s] (0,02534 [m^3/s]) (desprezando as perdas de energia), supondo o escoamento permanente.



Resp: D ≈ 50 mm

QUESTÃO 2:



$h = 8{,}5\ m$

$\dot{V} = 0{,}02534\ m^3/s$

$\dot{V} = Vel \cdot A = Vel \cdot \frac{\pi D^2}{4}$

Sol:

$$\frac{P_1}{\gamma} + \frac{V_1^2}{2g} + z_1 = \frac{P_2}{\gamma} + \frac{V_2^2}{2g} + z_2 \; ; \; \begin{cases} P_1 = P_2 = P_{atm} \\ z_1 - z_2 = h = 8{,}5\ [m] \\ V_1 \cong 0\ [m/s] \end{cases}$$

$$V_2 = \sqrt{2 g h}$$

$$V_2 = \sqrt{2 \cdot 9{,}806 \cdot 8{,}5}$$

$$V_2 = 12{,}9\ m/s$$

$$\frac{\pi D^2}{4} = \frac{\dot{V}}{Vel} = \frac{0{,}02534}{12{,}9}$$

$$D^2 = \frac{4 \cdot 0{,}02534}{\pi \cdot 12{,}9}$$

$$D = \sqrt{}$$

$$\boxed{D = 4{,}999 \cdot 10^{-2}\ [m] = 49{,}99\ [mm]}$$

Questão 3:

Em um reservatório de S.L. constante, tem-se um orifício com diâmetro $d_1 = 0{,}02$ [m] à profundidade $h_1 = 3$ [m] (Fig 2). Substituindo-o por outro com diâmetro $d_2 = 0{,}015$ [m], determinar a que profundidade deve ficar o novo orifício, a fim de que a vazão seja a mesma do primeiro, desprezando todas as perdas de energia.

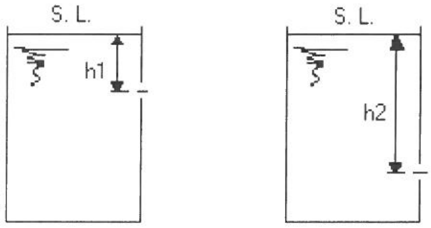
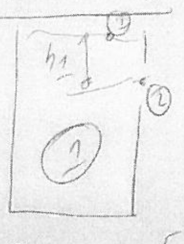
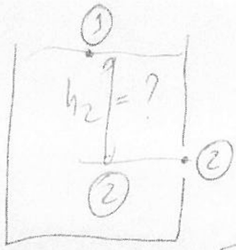


Fig. 2 – orifício num reservatório

Resp: $h_2 \approx 9{,}481$ m.

QUESTÃO 3:





$D_2 = 0,02\,[m]$

$h_1 = 3\,[m]$

$D_2 = 0,015\,[m]$

$h_2 = ?$

$\dot V_1\,[m^3/s] = \dot V_2\,[m^3/s]$

Resposta:

$h_2 = 9,481\,[m]$

$$\frac{p_1}{\gamma} + \frac{v_1^2}{2g} + z_1 = \frac{p_2}{\gamma} + \frac{v_2^2}{2g} + z_2$$

(BERNOULLI)

Eq. da continuidade:

$\dot V_1 = A_1 \cdot vel_1 = A_2 \cdot vel_2 = \dot V_2 = \dot V\,[m^3/s]$

$V_2 = \sqrt{2 g h_1} = \sqrt{2 \cdot 9,806 \cdot 3} \Rightarrow$

$V_2 = 7,67\,[m/s]$

$\dot V_1 = V_2 \cdot A_2 = 7,67\,\frac{\pi\,0,02^2}{4} \Rightarrow$

$\Rightarrow \dot V_1 = 2,41 \cdot 10^{-3}\,\left[\frac{m^3}{s}\right] = 2,41\,[l/s]$

$2,41 \cdot 10^{-3} = \sqrt{2 g h_2} \cdot \frac{\pi\,0,015^2}{4}$

$\boxed{h_2 = 9,481\,[m]}$

Questão 4:

Óleo combustível (SAE 10) escoa através de um medidor Venturi (Fig 3). A pressão no ponto 1 é 2,04 [kgf/cm^2]. O coeficiente de descarga C_d do Venturi é 0,95. Calcule a vazão volumétrica se a pressão no ponto 2 for 1,70 [kgf/cm^2]. Dados: A densidade (absoluta) do óleo, d = 0,91 e $\gamma_{oleo} = 1000$ [kgf/m^3].

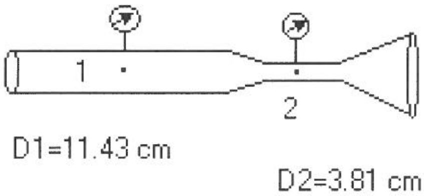


Fig. 3 – Medidor Venturi

Resp: $\dot{V} = 0{,}0093$ [m^3/s] = 9,3 [ℓ/s].

QUESTÃO 4:

De Bernoulli (I) e Continuidade (II)

$$\begin{cases} \dfrac{P_1}{\gamma} + \dfrac{V_1^2}{2g} + z_1 = \dfrac{P_2}{\gamma} + \dfrac{V_2^2}{2g} + z_2 & \text{(I)} \\ \dot{V} = A_1 V_1 = A_2 V_2 & \text{(II)} \end{cases}$$

$$\dot{V}\left[\frac{m^3}{s}\right] = A_1 V_1 = \frac{\pi}{4} D_1^2 \left[\frac{2g\left(\frac{P_1 - P_2}{\gamma} + z_1 - z_2\right)}{\left(\frac{A_1}{A_2}\right)^2 - 1}\right]^{1/2}$$

CÁLCULOS:

$$\begin{cases} g = 9{,}806\,[m/s^2] \; ; \; C_D = 0{,}95\,[-] \\ P_1 = 2{,}04 \frac{kgf}{cm^2} = 2{,}04 \; 10^4 \,[kgf/m^2] \\ P_2 = 1{,}70 \,kgf/cm^2 = 1{,}70 \; 10^4 \,[kgf/m^2] \end{cases} P_1 - P_2 = 3400\,[kgf/m^2]$$

$$\gamma_{óleo} = \gamma_{H_2O} \cdot d_{óleo} = 1000 \frac{kgf}{m^3} \cdot 0{,}91 = 910 \left[\frac{kgf}{m^3}\right]$$

$$A_1 = \frac{\pi}{4} D_1^2 = \frac{\pi}{4}\left(11{,}43 \cdot 10^{-2}\, m\right)^2 = 1{,}0261 \cdot 10^{-2}\,[m^2]$$

$$A_2 = \frac{\pi}{4} D_2^2 = \frac{\pi}{4}\left(3{,}81 \cdot 10^{-2}\, m\right)^2 = 1{,}1401 \cdot 10^{-3}\,[m^2]$$

$$\left(\frac{A_1}{A_2}\right)^2 = 80{,}9999 \cong 81\,[-]$$

$$\dot{V}_{real} = C_D \cdot \dot{V} = C_D \cdot V_1 = \overbrace{0{,}95 \cdot 1{,}0261 \cdot 10^{-2}}^{0{,}00974795}\,[m^2] \left[\frac{2 \cdot 9{,}806\left(\frac{3400}{910}\right)}{81 - 1}\right]^{1/2} =$$

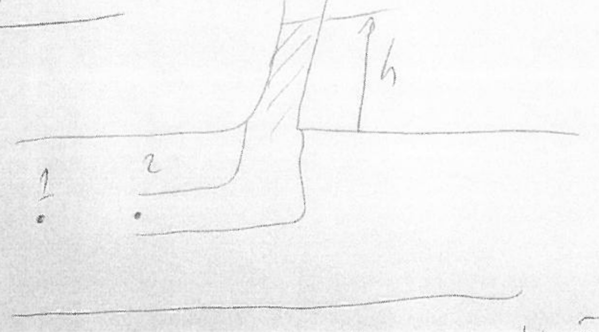
$$\dot{V}_{real} = 9{,}3293 \cdot 10^{-3} \left[\frac{m^3}{s}\right] = \boxed{9{,}33\,[l/s]}$$

Questão 5:

Um tubo de Pitot estático é usado para medir a velocidade d'água escoando num tubo. Se a diferença entre pressão total e pressão estática for 1,07 [kgf/cm^2], qual é a velocidade?

Resp: $V \approx 14{,}49$ m/s.

QUESTÃO 5:



$V_1 = \sqrt{2gh}$ $\qquad z_1 = z_2$ e $V_2 = 0$

LP = Linha piezométrica

$$\underbrace{\overbrace{\frac{P_1}{\rho} + \cancel{z_1}}^{LP} + \frac{V_1^2}{2g}}_{\substack{LE = \text{Linha de energia} \\ \mathrm{I}}} = \underbrace{\frac{P_2}{\rho} + \cancel{z_2} + \frac{\overbrace{V_2^2}^{=0}}{2g}}_{\mathrm{II}}$$

Em II, temos pressão estática, pois $V_2 = 0$ m/s

Em I, temos pressão total

$$P_{TOTAL} = P_{ESTÁT.} = \underbrace{P_E}_{h_{estática}} + \underbrace{P_D}_{\text{dinâmica}}$$

$$\Delta P = P_{TOTAL} - P_E = 1{,}07 \cdot 10^4 \; [kgf/m^2]$$

$$\gamma_{H_2O} = 1000 \; kgf/m^3$$

$$V_1 = \sqrt{2g\left(\frac{P_2 - P_1}{\gamma}\right)} = \sqrt{2 \cdot 9{,}806 \cdot \left(\frac{1{,}07 \cdot 10^4}{1000}\right)} = \boxed{14{,}486 \; \left[\frac{m}{s}\right]}$$

Escoamento de um Fluido Real

Fluído

Um fluído é uma substância que se deforma continuamente quando submetida a uma tensão de cisalhamento.

Uma força de cisalhamento (ou atrito) é a componente tangencial da força que age sobre a superfície e, dividida pela área da superfície, dá origem à tensão de cisalhamento.

Fluído Real

O fluído real tem viscosidade ($\mu > 0$) que causa o atrito do fluído (atrito entre as duas camadas de um fluído quando em escoamento).

Ela é responsável pela irreversibilidade e no comportamento do escoamento dos fluídos na maioria dos processos em vários campos da engenharia.

Viscosidade

Viscosidade por definição é a propriedade de um fluído responsável pela resistência ao cisalhamento.

Viscosidade dinâmica ou absoluta, $\mu = \rho.\nu$ [Ns/m^2], onde ν = viscosidade cinemática [m^2/s].

Lei de Newton para viscosidade

A lei de Newton da viscosidade é definida como:

$$\tau = \mu.\frac{dv}{dy} \quad (5.1)$$

onde:

τ = a tensão de cisalhamento [N/m^2];

$\frac{dv}{dy}$ = o gradiente de velocidade (taxa de transformação) [s^{-1}] = [$1/s$];

μ = a viscosidade absoluta ou dinâmica [Ns/m^2] = [$Pa.s$].

A viscosidade é uma função da temperatura. Nos líquidos a viscosidade diminui com a temperatura e nos gases ela aumenta com a temperatura.

Todo fluído que se aplica a equação (5.1) é chamado de fluído Newtoniano.

Classificação dos fluídos

Os fluídos podem ser classificados como newtonianos ou não-newtonianos.

No fluído newtoniano existe uma relação linear entre o valor da tensão de cisalhamento aplicada e a velocidade de deformação resultante (taxa de deformação ou gradiente de velocidade). É bom lembrar que μ é constante na equação (5.1) e é válida em um escoamento laminar.

No fluído não-newtoniano existe uma relação não-linear entre o valor da tensão de cisalhamento aplicada e a velocidade de deformação angular.

Gases e líquidos finos tendem a ser fluídos newtonianos, enquanto que hidrocarbonetos de longas cadeias podem ser não-newtonianos.

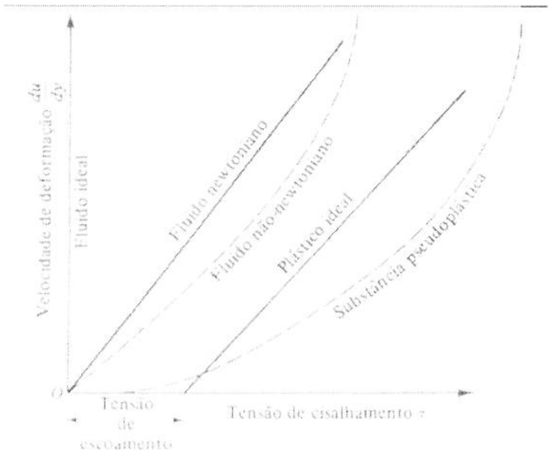


Fig. 1 – Digrama reológico

Escoamento Laminar e Turbulento

Escoamento Laminar:

Laminar quando as linhas de corrente se mantêm paralelas. Os elementos fluídos ou partículas parecem deslizar uns sobre os outros em camadas ou lâminas. Este movimento é chamado escoamento laminar.

Escoamento Turbulento:

Turbulento quando as linhas de corrente perdem a individualidade. Os elementos fluídos ou partículas tem um movimento desordenado ou caótico de partículas individuais, sendo vistos redemoinhos de vários tamanhos. Este movimento é chamado de escoamento turbulento.

Entre os regimes laminar e turbulento pode-se caracterizar um regime transitório, em que as linhas de corrente não perdem totalmente a individualidade. Esta região representa grande instabilidade. Ocorrendo qualquer perturbação, o regime passa a ser turbulento. Além disso, no regime laminar a distribuição de velocidade do escoamento é parabólica, enquanto que no turbulento é achatada. Sendo a velocidade local do escoamento $v = V_{máx}$ no centro do tubo. No escoamento laminar temos que a velocidade média, $V = 0{,}5.V_{máx}$ e no turbulento $V = 0{,}82.V_{máx}$ (ou 0,80 a 085).

Número de Reynolds

Para se saber se o escoamento é laminar ou turbulento, é necessário saber o número de Reynolds. O número de Reynolds é um parâmetro adimensional que se aplica a escoamentos dinamicamente semelhantes. Ele é definido pela relação:

$$Re = \frac{\rho.V.L}{\mu} = \frac{V.L}{\nu} \quad (5.1.1)$$

onde:
ρ = massa específica do fluído [kg/m^3];
V = velocidade característica do fluído [m/s];
μ = viscosidade absoluta do fluído [Ns/m^2];
L = comprimento característico [m].

Para o caso de tubos: L = D = diâmetro do tubo [m], V = velocidade média do fluído [m/s].
Logo,

$$\boxed{Re = \frac{\rho.V.D}{\mu} = \frac{V.D}{\nu}} \leftarrow \text{adimensional} \quad (5.1.2)$$

O número de Reynolds é uma relação entre as forças de inércia e de viscosidade.
Uma vez levantado o número de Reynolds, este vale para qualquer fluído newtoniano ou não-newtoniano.

Classificação dos Regimes

As experiências mostram que nos condutos (tubos circulares) forçados:

(a) Se $Re \leq 2000$ (5.1.3)

o regime (escoamento) é LAMINAR, isto é, as partículas percorrem trajetórias paralelas (Fig. 1).

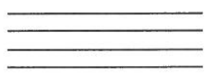


Fig. 1 – Escoamento laminar

(b) Se $2000 < Re < 4000$ (5.1.4)
o escoamento é instável ou de transição.

(c) Se $Re \geq 4000$ (5.1.5)
o regime é turbulento, isto é, as trajetórias das partículas são irregulares (Fig. 2)

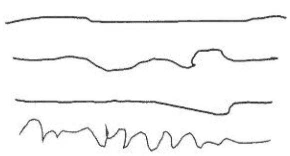


Fig. 2 – Escoamento turbulento

PROBLEMAS RESOLVIDOS

Problema 1

Suponhamos um óleo de palmeira ($\mu = 4524 \times 10^{-6}$ [kgf.m^{-2}.s]), escoando sob regime laminar em uma tubulação industrial com 90 [mm] de raio interno (Fig. 3). Supondo que a distribuição da velocidade seja uma função linear (OM na figura), obter:

1) o gradiente de velocidade dV/dy;
2) o valor da tensão de cisalhamento τ no fluido.

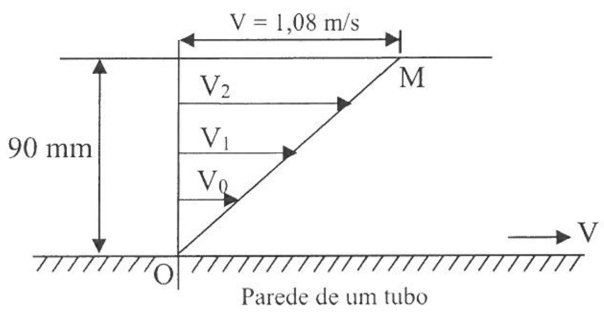


Figura 3 – Distribuição de velocidades do escoamento sobre uma placa.

Solução

1) O segmento de reta OM satisfaz à função linear $V = \alpha . y \;\therefore\; \alpha = \frac{V}{y}$

Pela figura, tem-se no ponto M:

y = r = 90 [mm] e V = 1,08 [m/s] = 1080 [mm/s] $\therefore\; \alpha = \frac{V}{y} = \frac{1080.mm/s}{90.mm} = 12.s^{-1}$ a qual representa a inclinação de OM e que corresponde ao gradiente de velocidade dv/dy, pois α é a razão entre v e y. Então,

$$\boxed{\frac{dv}{dy} = 12.s^{-1}}$$

Nota: A unidade s^{-1} é conhecida como "segundo recíproco ou inverso". Resp.

2) Pelo enunciado, $\mu = 4524 \times 10^{-6}$ [kgf.m^{-2}.s].

Substituindo estes 2 últimos valores na lei de Newton da viscosidade, tem-se,

$$\tau = \mu \frac{dv}{dy} = 4524.\times .10^{-6}.Kgf.m^{-2}.s \times 12.s^{-1}$$

$$\boxed{\tau \cong 0{,}054.Kgf/m^2}$$ Resp.

Problema 2

Mostrar que não há tensão de cisalhamento nos fluidos em repouso.

Solução:

Na situação de repouso, não há velocidade e portanto, é nulo o gradiente de velocidade:

$$\frac{dv}{dy} = 0 \quad \therefore \qquad \tau = \mu \frac{dv}{dy} = 0$$

mostrando que a tensão de cisalhamento é nula, qualquer que seja a viscosidade μ do fluido em repouso.

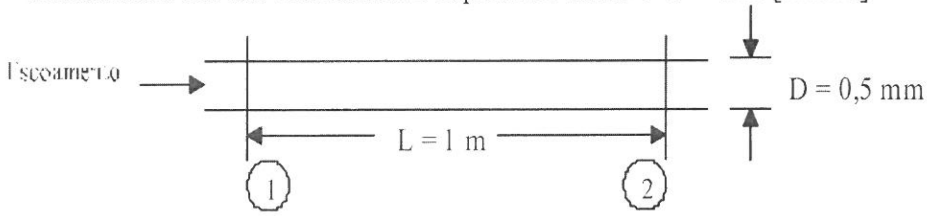
Problema 3

Um viscosímetro simples e preciso pode ser confeccionado a partir de um pedaço de tubo capilar. Se a vazão e a queda de pressão forem medidas e a geometria do tubo for conhecida, a viscosidade pode ser calculada através da equação $\dot{V}\left[\frac{m^3}{s}\right] = \frac{\pi.\Delta P\left[\frac{N}{m^2}\right].D\,[m]^4}{128.\mu\,[Pa.s].L\,[m]}$.

Um teste para um certo líquido em um viscosímetro capilar forneceu os seguintes dados: vazão = 880 [mm³/s], diâmetro do tubo = 0,50 [mm], comprimento do tubo = 1 [m], queda de pressão = 1,0 [MPa].

Determinar a viscosidade do líquido.

Solução: Escoamento em um viscosímetro capilar. A vazão é $\dot{V}$ = 880 [mm³/s]



$$\Delta P = P_1 - P_2 = 1{,}0 MPa. = 1\times 10^6.N/m^2$$

A equação de cálculo: $\dot{V} = \frac{\pi.\Delta.P.D^4}{128.\mu.L}$

Suposições:

1) Escoamento laminar; 2) Escoamento permanente; 3) Escoamento incompressível; e 4) Escoamento totalmente desenvolvido (o perfil de velocidade é o mesmo em qualquer seção)

Então,

$$\mu = \frac{\pi.\Delta.P.D^4}{128.L.\dot{V}} = \frac{\pi}{128 \times 1m} \times \left(1{,}0 \times 10^6 \frac{N}{m^2}\right) \times ((0{,}50)^4 mm^4) \times \left(\frac{1\,m}{10^3 mm}\right) \times \left(\frac{s}{880.\,mm^3}\right)$$

$$\therefore \quad \boxed{\mu \cong 1{,}74 \times 10^{-3} \frac{N.s}{m^2}} \quad \text{Resp.}$$

Conferir o número de Reynolds $Re = \frac{\rho.V.L}{\mu} = \frac{V.L}{\nu}$:

Supor que a massa específica do fluido seja similar à da água, ou seja, 999 [kg/m³].

Da Equação da continuidade: $V = \frac{\dot{V}}{A} = \frac{4.\dot{V}}{\pi.D^2}$

$$= \frac{4}{\pi} \times \frac{880.\,mm^3}{s} \times \frac{1}{(0{,}50)^2 mm^2} \times \frac{1\,m}{10^3.\,mm}$$

$$\therefore \quad V \cong 4{,}48\, m/s$$

Número de Reynolds:

$$Re = \frac{\rho.V.D}{\mu} = 999 \frac{Kg}{m^3} \times 4{,}48 \frac{m}{s} \times \left(0{,}50.\,mm \times \frac{1\,m}{10^3 mm}\right) \times \left(\frac{m^2}{1{,}74 \times 10^{-3} Ns}\right) \times \frac{Ns^2}{Kg.m},$$

$$\text{onde: } 1\,N = kg.\frac{m}{s^2} \therefore$$

$$\therefore \quad Re \cong 1286\,[-]$$

Conseqüentemente, o escoamento é mesmo laminar, já que Re < 2000. Resp.

Problema 4

Determinar o número de Reynolds para o escoamento de 140 [ℓ/s] de óleo, viscosidade cinemática igual a $\nu = 0{,}00001$ [m²/s], num tubo de ferro fundido de 200 [mm] = 0,2 [m] de diâmetro.

Solução

$$Re = \frac{\rho.V.L}{\mu} = \frac{V.L}{\nu} \quad (1)$$

Equação da continuidade: $\dot{V} = A.V = \frac{\pi.D^2}{4} V$ ou $V = \frac{4.\dot{V}}{\pi.D^2}$ (2)

Levando (2) em (1) tem-se,

$$Re = \frac{4.\dot{V}}{\pi.D.\nu} \quad (3)$$

Dados: $\dot{V}$= 140 [ℓ/s] = 0,140 [m³/s], D = 200 [mm] = 0,2 [m] , ν = 0,00001 [m²/s]

$$\therefore \quad Re = \frac{4 \times 0{,}140.m^3/s}{\pi \times (0{,}2.m)(0{,}00001.m^2/s)} \cong 8909{,}9$$

ou

$Re \cong 8909{,}9 > 4000$ Escoamento turbulento! Resp.

7ª Lista de Exercícios

Questão 1

Um óleo de viscosidade absoluta 0,01 [kgf.s/m²] e densidade 0,85 escoa através de um tubo de ferro fundido de 300 [mm] de diâmetro com a vazão volumétrica 0,05 [m³/s]. Determinar o número de Reynolds.

Resp.: $Re \cong 1837{,}8 < 2000$, laminar!

Questão 2

Um líquido tem viscosidade 0,005 [kg/(m.s)] e massa específica de 850 [kg/m³]. Calcular a viscosidade cinemática em unidades SI.

Resp.: $\nu \cong 5{,}8\ x\ 10^{-6} \left[\frac{m^2}{s}\right] = 5{,}8 \left[\mu.\frac{m^2}{s}\right]$ $\therefore$ mícron: $\mu = 10^{-6}$

Questão 3

Defina a viscosidade e a lei de Newton da viscosidade.

Questão 4

Explique escoamentos laminar e turbulento.

Questão 5

O que é um fluído newtoniano? Citar os exemplos.

Questão 6

O que é um fluído não-newtoniano? Dar os exemplos.

CÁLCULO DE PERDA DE CARGA DISTRIBUÍDA E LOCALIZADA

Equação de Bernoulli para Fluidos Ideais

A equação de Bernoulli para o fluido ideal foi deducida, como sendo, $\frac{P_s - P_e}{\rho} + \frac{V_s^2 - V_e^2}{2} + g(Z_s - Z_e) = 0$ e novamente pode ser escrita como:

$$\frac{P_1}{\gamma} + \frac{V_1^2}{2.g} + z_1 = \frac{P_2}{\gamma} + \frac{V_2^2}{2.g} + z_2 + \cancel{h_f}^{\,0} \quad (6.1)$$

onde h_f = perda de carga = 0 = $(u_s - u_e - q_{VC})\frac{1}{g}$

Lembrando a 1ª lei: $-\omega_{VC} = P_s v_s - P_e v_e + \frac{V_s^2 - V_e^2}{2} + g(Z_s - Z_e) + (u_s - u_e - q_{VC})$, sendo $V\left[\frac{m}{s}\right], v\left[\frac{m^3}{kg}\right], P\left[\frac{N}{m^2}\right]\ e\ \omega_{VC}\left[\frac{J}{kg}\right], onde\ \left[\frac{J}{kg}\right] = \left[\frac{m^2}{s^2}\right].$

Equação de Bernoulli para os Fluidos Reais

Para os fluidos reais ($\mu > 0$) a perda de carga, $h_f > 0$, portanto, a equação de Bernoulli é modificada e escrita como:

$$\frac{P_1}{\gamma} + \frac{V_1^2}{2.g} + z_1 = \frac{P_2}{\gamma} + \frac{V_2^2}{2.g} + z_2 + h_f \quad (6.1.1)$$

que é a equação de Bernoulli para os fluidos reais.

Em geral,

$\frac{P_1}{\gamma}$ = carga de pressão ou carga piezométrica [m];

$\frac{V^2}{2.g}$ = carga de velocidade ou carga de energia cinética [m];

z = carga de altura ou carga da energia potencial [m];

h_f = perda de energia ou perda de carga [m].

Finalmente,

$$h_f = \left(\frac{P_1}{\gamma} + \frac{V_1^2}{2.g} + z_1\right) - \left(\frac{P_2}{\gamma} + \frac{V_2^2}{2.g} + z_2\right) \quad (6.1.1.a.)$$

que fornece a perda de caga entre as seções (1) e (2) de um fluido real.

A primeira soma entre parênteses representa a energia por unidade de peso (N.m/N = m) de fluido na seção (1).

A segunda é também a energia por unidade de peso de fuido, porém, na seção (2).

Assim, h_f representa a diferença ou perda de energia, experimentada pela unidade de peso do fluido, ao ser transportada de uma para a outra seção do conduto.

Já vimos que a equação de Bernoulli permite relacionar carga e energia. Por isto, h_f é conhecido como "perda de carga devido ao atrito de un fluido real".

A equação $h_f = \left(\frac{P_1}{\gamma} + \frac{V_1^2}{2.g} + z_1\right) - \left(\frac{P_2}{\gamma} + \frac{V_2^2}{2.g} + z_2\right)$ (6.1.1.a.) é válida para um escoamento num tubo, na ausência de trabalho de eixo e fluido real incompressível.

Energia Fornecida para uma Bomba

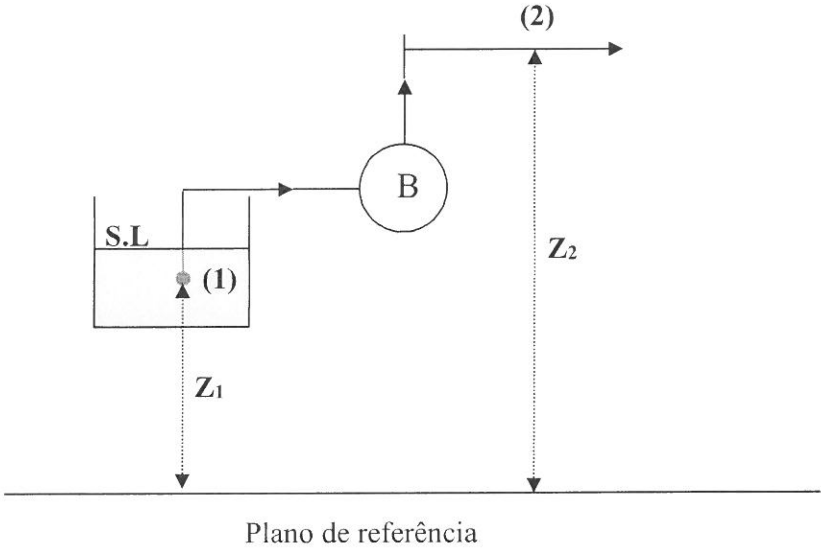


Figura 1 - Instalação com bomba.

Suponhamos uma bomba (Fig.1), que eleva o fluido do ponto (1) ao ponto (2), entre os quais há a perda de carga h_f.

Para tal, a bomba fornecerá ao ponto (1) a necessária energia H_B. Então, o 1º membro (lado esquerdo) de $\frac{P_1}{\gamma} + \frac{V_1^2}{2.g} + z_1 = \frac{P_2}{\gamma} + \frac{V_2^2}{2.g} + z_2 + h_f$ (6.1.1.) ficará acrescido dessa parcela H_B.

H_B é a carga fornecida (desenvolvida) pela bomba.

Portanto, tem-se

$$\left(\frac{P_1}{\gamma} + \frac{V_1^2}{2.g} + z_1\right) + H_B = \frac{P_2}{\gamma} + \frac{V_2^2}{2.g} + z_2 + h_f \qquad (6.1.2)$$

que é a Equação de Bernoulli para o caso em que a instalação recebe a energia de uma bomba.

Potência de uma Bomba

Pode-se mostrar que a potência de bomba, sem considerar o rendimento de bomba é:

$$N_B = \gamma \left[\frac{kgf}{m^3}\right] . \dot{V} \left[\frac{m^3}{s}\right] . H_B[m] \quad \text{(em [Kgf.m/s])} \quad (6.1.3.)$$

onde N_B =Potencia de uma bomba, γ = Pêso específico d'água [kgf/m³], $\dot{V}$ =Vazão volumétrica d'água [m³/s], H_B = carga fornecida por uma bomba [m].

<u>Nota</u> 1 [cv] = 736 [W] = 75 [Kgf.m/s].

$$\therefore \quad N_B = \gamma . \dot{V} . H_B / 75 \text{ (em [cv])}$$

Instalação com Bomba e/ou Turbina para Fluidos Reais

Pode-se mostrar que a equação genérica com bomba e/ou turbina é

$$\boxed{\left(\frac{P_1}{\gamma} + \frac{V_1^{\,2}}{2.g} + z_1\right) + H_B = \left(\frac{P_2}{\gamma} + \frac{V_2^{\,2}}{2.g} + z_2\right) + H_t + h_f} \quad (6.1.4)$$

onde H_t = carga produzida por uma turbina.

A potência de uma turbina é dada por:

$$N_t = \gamma \left[\frac{kgf}{m^3}\right] . \dot{V} \left[\frac{m^3}{s}\right] . H_t[m] \text{ (em [Kgf.m/s])} = \frac{\gamma . \dot{V} . H_t}{75} \text{ (em [cv])} \quad (6.1.5)$$

onde N_t= Potencia de uma turbina.

Potência Real

A <u>potência real</u> fornecida (gasto de energia) por uma <u>bomba</u> ao fluido é:

$$N_B = \frac{\gamma \left[\frac{kgf}{m^3}\right] . \dot{V} \left[\frac{m^3}{s}\right] . H_B[m]}{\eta_B} \text{ (em [Kgf.m/s])} = \frac{\gamma . \dot{V} . H_B}{75 . \eta_B} \text{ (em [cv])} \quad (6.1.5)$$

onde η_B = rendimento da bomba.

A <u>potência real</u> produzida por uma <u>turbina</u> é:

$$N_t = \gamma \left[\frac{kgf}{m^3}\right] . \dot{V} \left[\frac{m^3}{s}\right] . H_t[m] . \eta_t \text{ (em [Kgf.m/s])} = \frac{\gamma . \dot{V} . H_t . \eta_t}{75} \text{ (em [cv])} \quad (6.1.6)$$

onde η_t = rendimento da turbina.

Perda de Carga (Energia) distribuída

A Fig. 2 mostra, um trecho de uma tubulação horizontal, de diâmetro D, rugosidade $\in$, por onde escoa um fluido com velocidade V, sendo sua massa específica ρ e a viscosidade μ.

Experimentalmente, verifica-se que existe diferença de pressão ΔP entre duas seções, distante L. Existe entre as seções 1 e 2 uma perda de carga, oriunda do escoamento.

Esta perda depende das características do fluido ρ, μ velocidade do escoamento V, da distância ente as seções L e do tubo D, $\in$, logo:

$$\Delta P = f(\rho, \mu, V, L, D, \in)$$

ou $h_f = f(\rho, \mu, V, L, D, \in)$

onde $h_f = \frac{\Delta P}{\gamma}$ (6.1.7.)

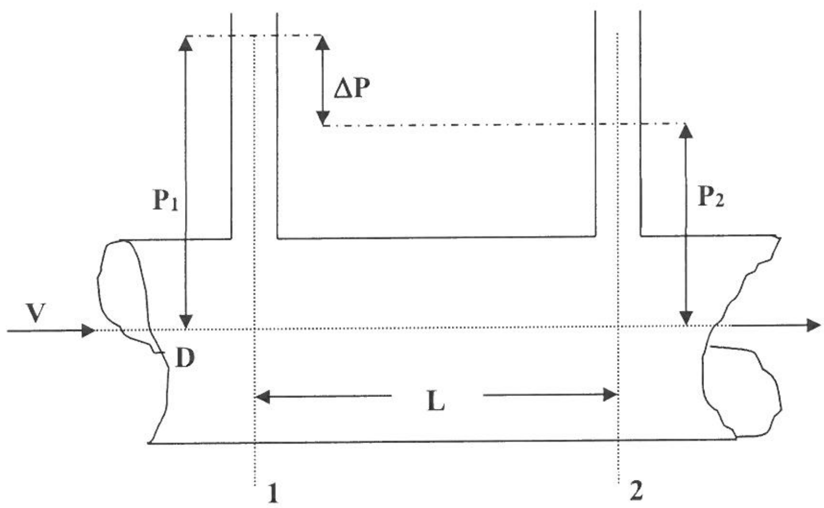


Figura 2. Perda de carga.
$\Delta P = P_1 - P_2$ = queda de pressão ao longo do escoamento

Pode-se demostrar que:

$$h_f = \emptyset\,(Re, \in/D).\frac{L}{D}\frac{V^2}{2.g}$$

ou seja $\boxed{h_f = f\,\frac{L}{D}\frac{V^2}{2.g}}$ (6.1.8.)

onde f = fator de atrito (adimensional) = $\emptyset\,(Re, \in/D)$, Re = número de Reynolds, $\in$ = rugosidade absoluta [mm], $\frac{\in}{D}$ = rugosidade relativa (adimesional), L = comprimento [mm], D = diâmetro [m], V = velocidade média do escoamento [m/s], g = acelaração da gravidade [m/s^2] = 9,81 [m/s^2] , h_f = perda de carga (perda de energia mecânica $g.h_f = (u_s - u_e - q_{VC})$ devido ao atrito ([m.N/N] = [m])

Esta equação é a equação de DARCY-WEISBACH.

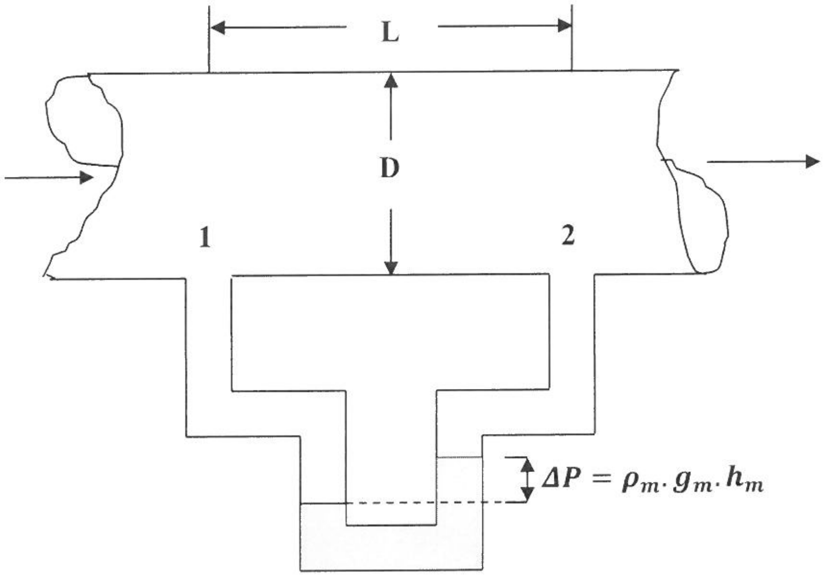
Escoamento em Tubos

A equação de DARCY-WEISBACH é geralmente adotada nos cálculos de condutos.

h_f é a perda de carga ou queda na linha piezométrica, no comprimento L do tubo de diâmetro interno D e com velocidade média V. h_f tem dimensão de comprimento e é expressa em metro-newtons por newton. O fator de atrito ou de perda de carga distribuida f é um fator adimensional necessário à equação para ser ter valores corretos para as perdas.

Todas as grandezas na equação $h_f = f\,\frac{L}{D}\frac{V^2}{2.g}$ (6.1.8.), exceto f, podem ser medidas experimentalmente.

A perda de carga h_f é medida por um manômetro diferencial ligado às tomadas piezométricas nas seções 1 e 2 separadas pela distância L.



A experiência mostra que o seguinte é verdade para escoamento turbulento:

1) A perda de carga h_f varia diretamente com o comprimento L do tubo;
2) A perda de carga h_f varia quase que proporcionalmente ao quadrado da velocidade V;
3) A perda de carga h_f varia quase que inversamente com o diâmetro D;
4) A perda de carga h_f depende da rugosidade ϵ da superfície interior do tubo;
5) A perda de carga h_f depende das proriedades do fluido, massa específica ρ e viscosidade absoluta μ;
6) A perda de carga h_f é independente da pressão P.

As equações do fator de atrito (f)

1. Regime laminar:

$f = \frac{64}{Re}$ para $Re \leq 2000$ (6.1.8.)

Tanto para tubo liso quanto para tubo rugoso.

<u>Nota:</u> A rugosidade não tem <u>nenhuma</u> influência sobre o <u>fator de atrito</u> f de um escoamento laminar

2. Regime turbulento:

<u>Tubo liso:</u> $\in/D < 20.(Re)^{-7/8}$

BLASIUS: $f = 0{,}3164.(Re)^{-0{,}25}$ para $3000 \leq Re \leq 10^5$ (6.1.9.)

NIKURADSE: $f = 0{,}0032 + 0{,}221.(Re)^{-0{,}237}$ para $10^4 \leq Re \leq 3{,}4 \times 10^6$ (6.2.0.)

KONAKOV: $f = (1{,}80.Log(Re) - 1{,}5)^{-2}$ para $2300 \leq Re \leq 4 \times 10^6$ (6.2.1.)

COLEBROOK: $\frac{1}{\sqrt{f}} = 0{,}86.Ln(Re.\sqrt{f}) - 0{,}8$ para $10^4 \leq Re \leq 3{,}4 \times 10^6$ (6.2.2.)

TAPAN-ELI: $f = 8.\left\{\frac{1}{0{,}4}.\left[Ln(Re.\sqrt{f}) - 3{,}232867951\right] + 5{,}5\right\}^{-2}$

para $2300 \leq Re \leq 4 \times 10^6$ (6.2.3.)

<u>Tubo rugoso:</u> para $4 \times 10^3 \leq Re \leq 10^7$

COLEBROOK-WHITE: $\frac{1}{\sqrt{f}} = -0{,}86.Ln\left(\frac{\in/D}{3{,}7} + \frac{2{,}51}{Re.\sqrt{f}}\right)$ (6.2.4.)

MOODY: $f = 0{,}0055.\left[1 + \left(20.000.\frac{\in}{D} + \frac{10^6}{Re}\right)^{1/3}\right]$ (6.2.5.)

PRANDT-COLEBROOK: $\frac{1}{\sqrt{f}} = 1{,}74 - 2.Log\left(2\frac{\in}{D} + \frac{18{,}7}{Re.\sqrt{f}}\right)$ (6.2.6.)

Problemas Simples de escoamentos em tubos

Problemas simples de escoamento em tubos são entendidos como aqueles nos quais a perda de carga distribuída, ou devida ao atrito, no tubo é a única perda presente. O tubo pode estar colocado numa posição que forma um ângulo qualquer com a horizontal. <u>Seis</u> variáveis comparecem nos problemas (o fluido é considerado incompressível): $\dot{V}, L, D, h_f, v, \in$.

Em geral L, v e $\in$, o comprimento, a viscosidade cinemática do fluido e a rugosidade absoluta, são dadaos ou podem ser determinados.

Os problemas simples de escoamentos em tubos podem então ser classificados em três tipos:

Problema	Dado	A encontrar
Tipo 1.	$\dot{V}, L, D, v, \in$	h_f
Tipo 2.	$h_f, L, D, v, \in$	$\dot{V}$
Tipo 3.	$h_f, \dot{V}, L, v, \in$	D

Em cada um desees casos,

(1) A equação de DARCY-WEISBACH $\left(h_f = f\frac{L}{D}\frac{V^2}{2.g}\right)$,

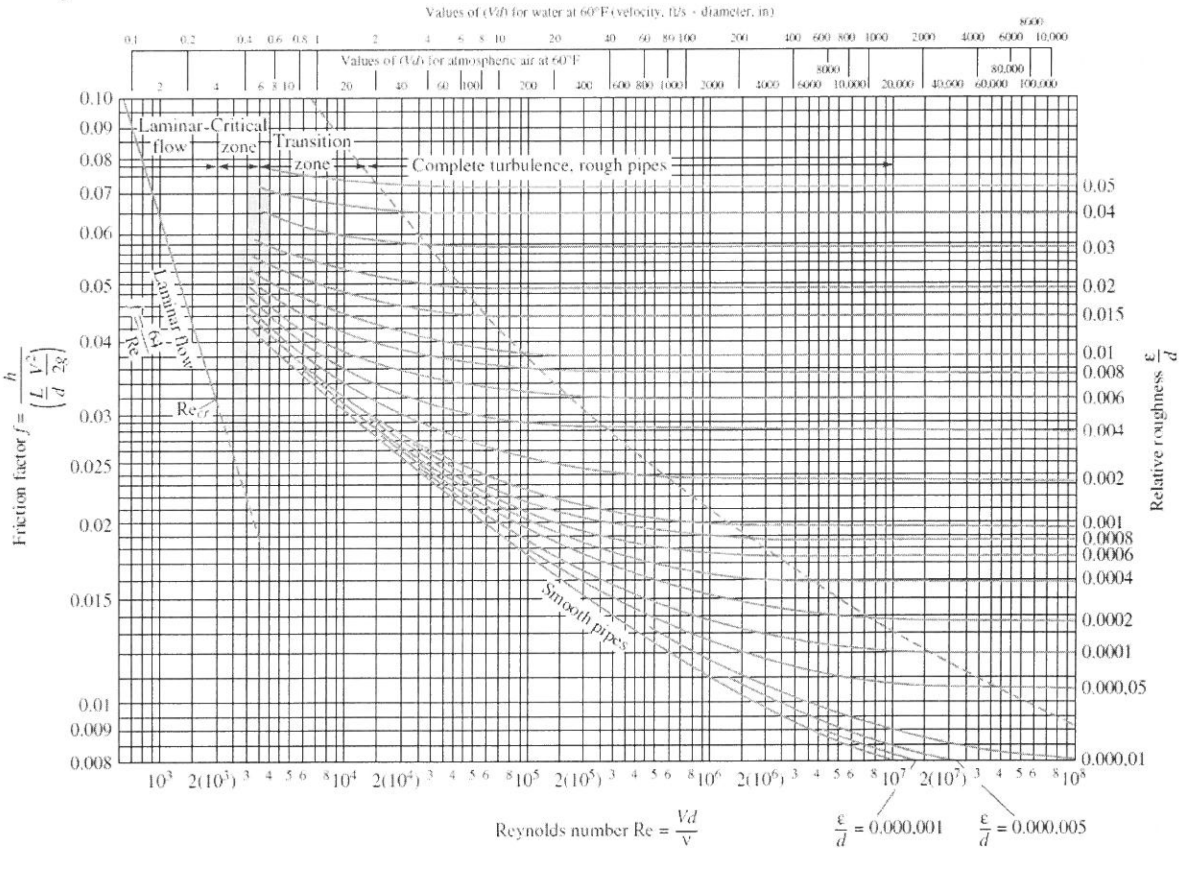
(2) A equação da continuidade $(\dot{V} = A.V)$,

(3) E o diagrama de MOODY ou equação analítica são usadas para determinar a grandeza incógnita.

Em lugar do diagrama de MOODY pode-se utilizar a seguinte fórmula (P. K. Swamee e A.K. Jain, *Explicit equations for Pipe-Flow problems*, J. Hydr. Div. Proc. ASCE, pp. 657-664, Maio 1976) explícita para *f*, dentro das restrições impostas,

$$f = \frac{1{,}325}{\left[Ln\left(\frac{\epsilon}{3{,}7.D}+\frac{5{,}74}{Re^{0{,}9}}\right)\right]^2} \qquad (6.2.7.)$$

Restrições: $10^{-6} \leq \epsilon/D \leq 10^{-2}$ e $5000 \leq Re \leq 3{,}4 \times 10^8$. Abaixo segue o diagrama de Moody:



Esta equação fornece um valor de *f* que difere menos de 1% daquele dadp pela equação de COLEBROOK-WHITE $\frac{1}{\sqrt{f}} = -0{,}86.Ln\left(\frac{\epsilon/D}{3{,}7} + \frac{2{,}51}{Re.\sqrt{f}}\right)$ (6.2.4.), podendo ser vantajosamente usada numa calculadora eletrônica.

Solução para obter h_f (Tipo 1): Solução direta

Problema	Dado	A encontrar
Tipo 1.	$\dot{V}, L, D, v, \in$	h_f
Tipo 2.	$h_f, L, D, v, \in$	$\dot{V}$
Tipo 3.	$h_f, \dot{V}, L, v, \in$	D

Para o problema tipo 1, com $\dot{V}, \in$ e D conhecidos, $Re = \frac{V.D}{v} = \frac{4.\dot{V}}{\pi.D.v}$; o f pode ser retirado da Fig. 5.32. (Diagrama de Moody) ou calculado pela equação $f = \frac{1,325}{\left[Ln\left(\frac{\in}{3,7.D}+\frac{5,74}{Re^{0,9}}\right)\right]^2}$ (6.2.7.).

A substituição na equação de DARCY-WEISBACH fornece h_f, a perda de carga (energia) devida ao escoamento no tubo por unidade de peso do fluido.

Exemplo 1

Determinar a perda de carga (energia) para o escoamento de 140 [ℓ/s] de óleo, v = 0,00001 [m²/s], num tubo de ferro fundido de 400 [m] de comprimento e 200 [mm] de diâmetro.

Solução

$\dot{V}$= 0,140 [m³/s], L = 400 [m], D = 0,2 [m], v = 0,00001 [m²/s], ferro fundido, $\in$ = 0,25 [mm] = 0,00025 [m].

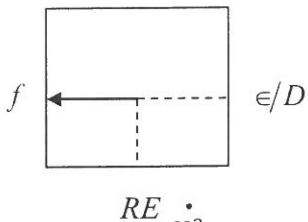
Cálculo do número de Reynolds (Re):

$$Re = \frac{4.\dot{V}}{\pi.D.v} = \frac{4(0{,}140.m^3/s)}{\pi(0{,}2.m)(0{,}00001.m^2/s)} \cong 89127$$

A rugosidade relativa é $\in/D$ = 0,25 [mm] / 200 [mm] = 0,00125

Do diagrama de Moody,
por interpolação, $f \cong$ 0,023
ou resolvendo a equação $f = \frac{1,325}{\left[Ln\left(\frac{\in}{3,7.D}+\frac{5,74}{Re^{0,9}}\right)\right]^2}$ (6.2.7.)

f = 0,0234 , logo



Da Equação da continuidade ao quadrado: $V^2 = \frac{\dot{V}^2}{A^2}$

$$h_f = f\frac{L}{D}\frac{V^2}{2.g} = 0{,}023\left(\frac{400.m}{0{,}2.m}\right)\left[\frac{0{,}14}{(\pi/4)(0{,}2.m)^2}\right]^2\frac{1}{2(9{,}806.m/s^2)}$$

ou $\boxed{h_F \cong 46{,}58.[m.N/N]}$ Resp.

Procedimento: (1) Calcule o valor do número de Reynolds (Re); (2) Com o valor de Re e $\in/D$, ache o valor de f no diagrama de Moody ou use a eq. (6.2.7.): $f = \frac{1{,}325}{\left[Ln\left(\frac{\in}{3{,}7.D}+\frac{5{,}74}{Re^{0{,}9}}\right)\right]^2}$ para $10^{-6} \leq \in/D \leq 10^{-2}$ e $5000 \leq Re \leq 3{,}4 \times 10^8$; e (3) calcule h_f pela equação de DARCY-WEISBACH.

Solução para obter $\dot{V}$ (Tipo 2)

Problema	Dado	A encontrar
Tipo 1.	$\dot{V}, L, D, v, \in$	h_f
Tipo 2.	$h_f, L, D, v, \in$	$\dot{V}$
Tipo 3.	$h_f, \dot{V}, L, v, \in$	D

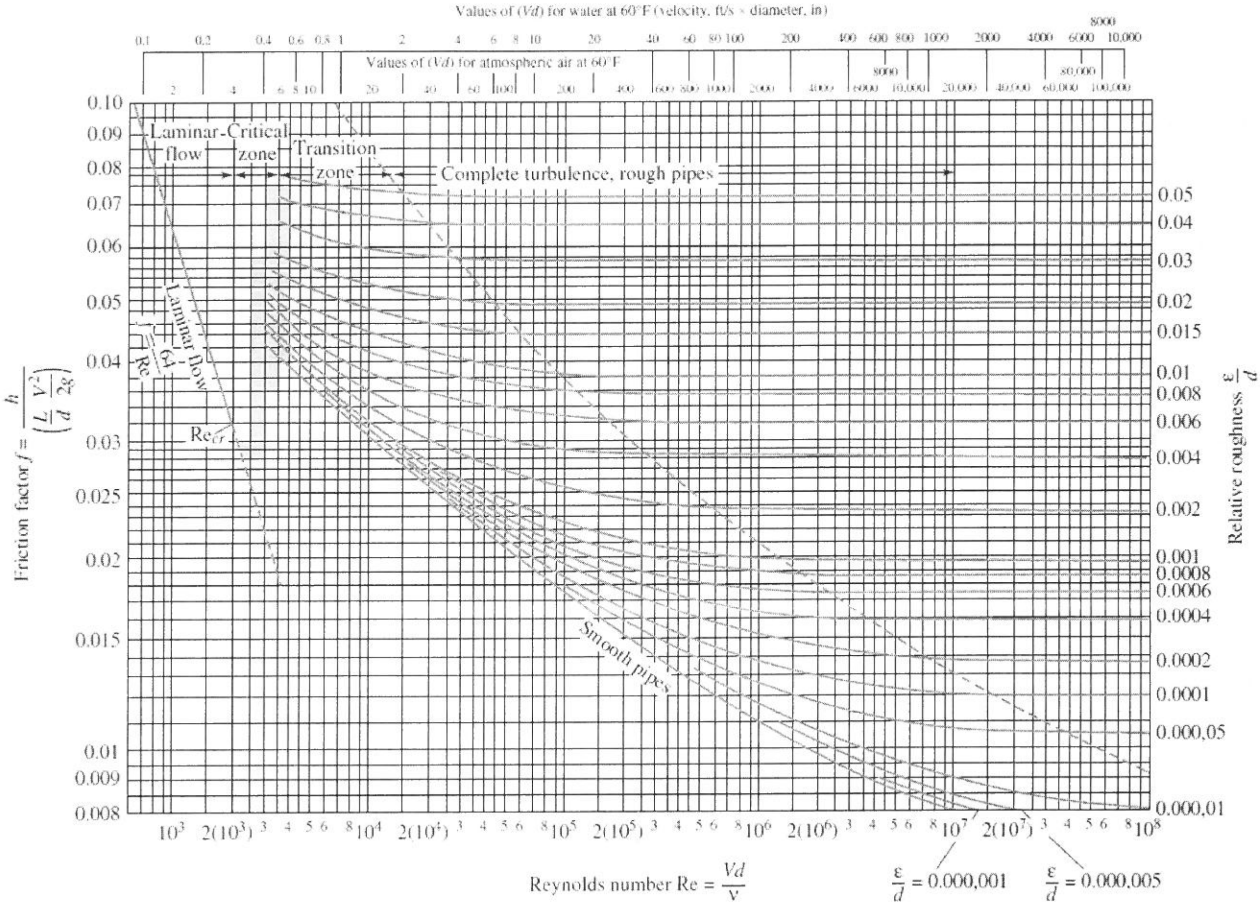
1. Escolhe-se um valor de f, com o valor de $(\in/D)$;
2. Calcula-se a velocidade usando a equação de DARCY-WEISBACH $\left(h_f = f\frac{L}{D}\frac{V^2}{2.g}\right)$;
3. Calcula-se o número de Reynolds (Re);
4. Com os valores de Re e $\in/D$, acha-se o valor de f (do diaframa de Moody ou da eq. 6.2.7: $f = \frac{1{,}325}{\left[Ln\left(\frac{\in}{3{,}7.D}+\frac{5{,}74}{Re^{0{,}9}}\right)\right]^2}$ para $10^{-6} \leq \in/D \leq 10^{-2}$ e $5000 \leq Re \leq 3{,}4 \times 10^8$;
5. Se f inicial for igual ao valor achado ($f_{inicial} - f_{achado} \leq 0{,}001$), calcula-se a vazão volumétrica $\dot{V}\left[\frac{m^3}{s}\right]$ com a equação da continuidade: $\dot{V} = A.V = \frac{\pi.D^2}{4}V$. Caso contrário, repita os cálculos do item 2 e 4 até convergir.

Exemplo 2

Água a 15 [°C] escoa num tubo de aço rebitado de 300 [mm] de diâmetro, $\in = 3$ [mm], com uma perda de carga de $h_f = 6$ [m] em 300 [m]. Calcular a vazão volumétrica $\dot{V}$ em [m³/s].

Solução

A rugosidade relativa é $\in/D = 0{,}003/0{,}3 = 0{,}01$. Do diagrama de Moody, com este fator da rugosidade relativa, escolhe-se um f tentativo de 0,04. Substituindo na equação de DARCY-WEISBACH $\left(h_f = f\frac{L}{D}\frac{V^2}{2.g}\right)$, tem-se:



$$6.[m] = 0{,}04\left(\frac{300.[m]}{0{,}3.[m]}\right)\frac{\left(V.[\frac{m}{s}]\right)^2}{2\times 9{,}806.[\frac{m}{s^2}]}$$

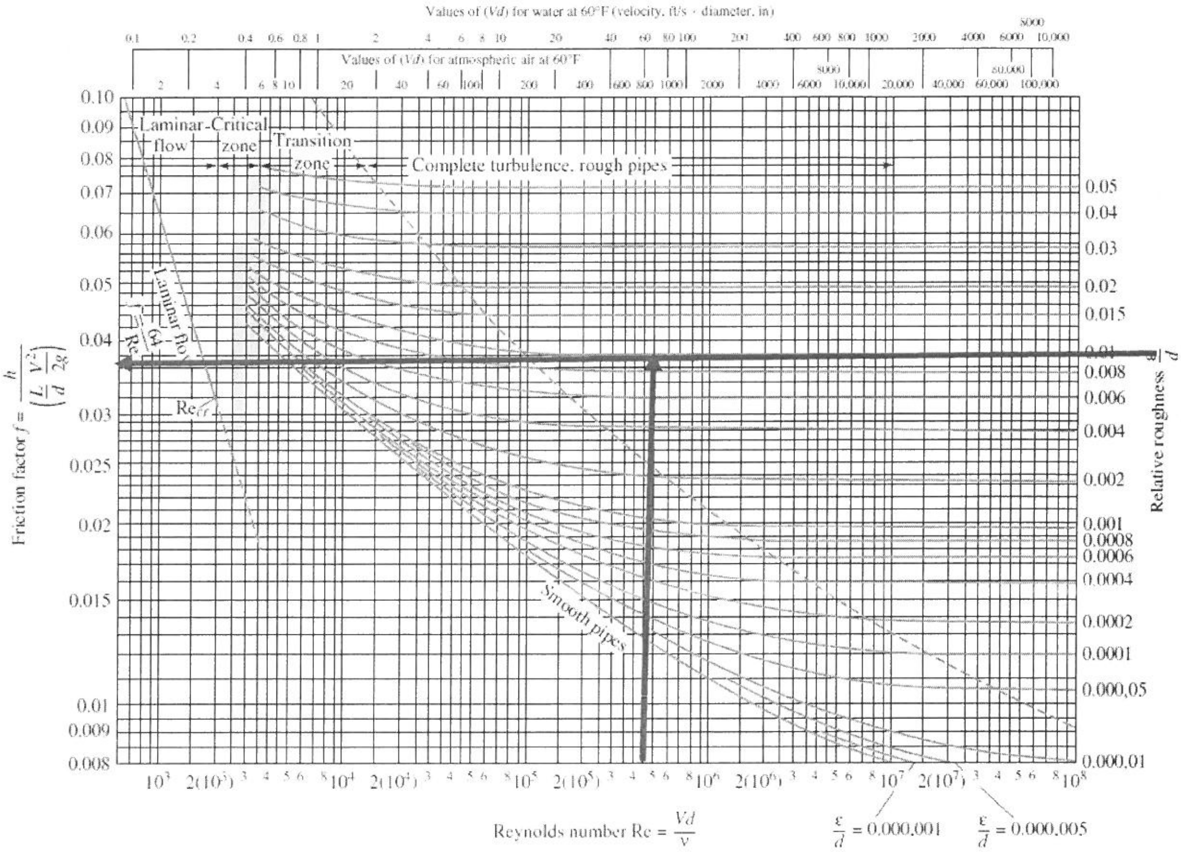
donde $V = 1{,}715$ [m/s]. Da tabela abaixo, $\nu = 1{,}13 \times 10^{-6}$ [m²/s]:

T, °C	ρ, kg/m^3	μ, N · s/m^2	ν, m^2/s	T, °F	ρ, slug/ft^3	μ, lb · s/ft^2	ν, ft^2/s
0	1000	1.788 E-3	1.788 E-6	32	1.940	3.73 E-5	1.925 E-5
10	1000	1.307 E-3	1.307 E-6	50	1.940	2.73 E-5	1.407 E-5
20	998	1.003 E-3	1.005 E-6	68	1.937	2.09 E-5	1.082 E-5
30	996	0.799 E-3	0.802 E-6	86	1.932	1.67 E-5	0.864 E-5
40	992	0.657 E-3	0.662 E-6	104	1.925	1.37 E-5	0.713 E-5
50	988	0.548 E-3	0.555 E-6	122	1.917	1.14 E-5	0.597 E-5
60	983	0.467 E-3	0.475 E-6	140	1.908	0.975 E-5	0.511 E-5
70	978	0.405 E-3	0.414 E-6	158	1.897	0.846 E-5	0.446 E-5
80	972	0.355 E-3	0.365 E-6	176	1.886	0.741 E-5	0.393 E-5
90	965	0.316 E-3	0.327 E-6	194	1.873	0.660 E-5	0.352 E-5
100	958	0.283 E-3	0.295 E-6	212	1.859	0.591 E-5	0.318 E-5

Tabela – Viscosidade cinemática ν e massa especifica ρ da água a 1 [atm] de pressão.

$$\therefore \quad Re = \frac{V.D}{\nu} = \frac{\left(1{,}715.[\frac{m}{s}]\right)(0{,}30.[m])}{1{,}13\times10^{-6}.[m^2/s]} \cong 455000 = 4{,}55 \text{ x } 10^5$$

com este número de Reynolds igual a Re = 4.55 x 10^5 e $\in/D = 0{,}01$ → Do diagrama de Moody:



$f \cong 0{,}036$ (via diagrama) ou $f = 0{,}038$ (Pode-se usar também a eq. 6.2.7.: $f = \dfrac{1{,}325}{\left[Ln\left(\frac{\epsilon}{3{,}7.D} + \frac{5{,}74}{Re^{0{,}9}}\right)\right]^2}$ para $10^{-6} \leq \epsilon/D \leq 10^{-2}$ e $5000 \leq Re \leq 3{,}4 \times 10^{8}$)

$$\boxed{\dot{V} = A.V = \frac{\pi}{4}(0{,}3)^2 \times 1{,}715 \cong 0{,}1213.\ [m^3/s]}$$ Resp.

Nota Precisava fazer mais uma ou duas tentativas para ter a resposta mais correta !

Outro método para obter $\dot{V}$:

Uma solução explícita para a vazão volumétrica $\dot{V}$ pode ser obtida da equação de COLEBROOK-WHITE (6.2.4.): $\frac{1}{\sqrt{f}} = -0{,}86.Ln\left(\frac{\epsilon/D}{3{,}7} + \frac{2{,}51}{Re.\sqrt{f}}\right)$, e da equação de DARCY-WEISBACH (6.1.8): $h_f = f\,\frac{L}{D}\,\frac{V^2}{2.g}$. Lembrando da Equação da continuidade ao quadrado: $V^2 = \frac{\dot{V}^2}{A^2}$.

Da equação de DARCY-WEISBACH,

$$h_f = f\frac{L}{D}\frac{\dot{V}^2}{2.g\left[\frac{\pi}{4}D^2\right]^2} \quad (6.1.8a.) \quad \therefore \ \dot{V} = A.V \text{ ou } V^2 = \dot{V}^2/A^2$$

Resolvendo em $1/\sqrt{f}$,

$\frac{1}{\sqrt{f}} = \frac{\sqrt{8}.\dot{V}}{\pi\sqrt{g.h_f D^5 L}}$ e substituindo esta equação na equação de COLEBROOK-WHITE e simplificando, tem-se,

$$\boxed{\dot{V} = -0{,}955.D^2\sqrt{g.D.h_F/L}.Ln\left(\frac{\in}{3{,}7.D} + \frac{1{,}775.v}{D\sqrt{g.D.h_F/L}}\right)} \quad (6.2.8.)$$

Esta equação, deduzida pela primeira vez por Swamee e Jain, é tão precisa quanto a equação de Colebrook-White e válida na mesma faixa de valores de $\in/D$ e Re. A substituição das variáveis do exemplo 2, D = 0,3 [m] , g = 9,806 [m/s^2], $\frac{h_f}{L}$ = 6/300 = 0,02 , $\in/D$ = 0,01 e ν = 1,13 × 10^{-6} [m^2/s]

fornece $\boxed{\dot{V} \cong 0{,}1213.[m^3/s]}$ Resp.

Solução para obter o diâmetro *D* (Tipo 3)

Problema	Dado	A encontrar
Tipo 1.	$\dot{V}, L, D, v, \in$	h_f
Tipo 2.	$h_f, L, D, v, \in$	$\dot{V}$
Tipo 3.	$h_f, \dot{V}, L, v, \in$	D

1. Admite-se um valor de f;

2. Resolve-se a seguinte equação em D, a partir de DARCY-WEISBACH, isola-se D^5 de: $h_f = f\frac{L}{D}\frac{\dot{V}^2}{2.g\left[\frac{\pi}{4}D^2\right]^2}$

$$D^5 = \frac{8.L.\dot{V}^2}{h_f.g.\pi^2}f = C_1.f \quad (1)$$

onde C_1 é a quantidade conhecida $8.L.\dot{V}^2/h_F.g.\pi^2$.

3. Resolve-se a seguinte equação em Re:

$$Re = \frac{4.\dot{V}}{\pi.v.D} = \frac{C_2}{D} \quad (2)$$

onde C_2 é a quantidade conhecida $4.\dot{V}/\pi.v$;

4. Calcula-se a rugosidade relativa $(\in/D)$. $\in\rightarrow$ é obtido do material, ou seja, é conhecido;
5. Com Re e $\in/D\rightarrow$ acha-se um novo f do diagrama de Moody.
6. Usa-se o novo f e repete-se o procedimento.
7. Quando o valor de f não mais variar (dê uma tolerância), as equações são obedecidas e o problema está resolvido

Nota: Usualmente somente uma ou duas tentativas (iterações) são necessárias. Como normalmente se usam tubos de tamanhos padronizados, o tamanho imediatamente maior àquele obtido pelos cálculos é escolhido.

Exemplo 3

Determinar o diâmetro D de tubo de aço comercial (*commercial steel*) necessário para transportar 4000 [gpm] (galão por minuto) (252 [ℓ/s]) de óleo, ν = 0,0001 [pé²/s] (0,00001 [m²/s]) à distância de 10 000 [pé] (3048 [m]) com uma perda de carga h_f de $75[\frac{pé.lbf}{lbf}]\ \left(22{,}8.\,[m\frac{Kgf}{Kgf}]\right)$.

Solução

1 [pé] = 12 [pol] = 0,3048 [m] , g = 9,806 [m/s²] ≅ 32,2 [pé/s²], 1 [gal/min] ≅ 0,002228 [pé³/s] ≅ 0,06309 [ℓ/s] ≅ 0,06309 × 10^{-3} [m³/s]

A vazão é $\dot{V} = 4000 \times 0{,}002228 \cong 8{,}93.[\frac{pé^3}{s}]$

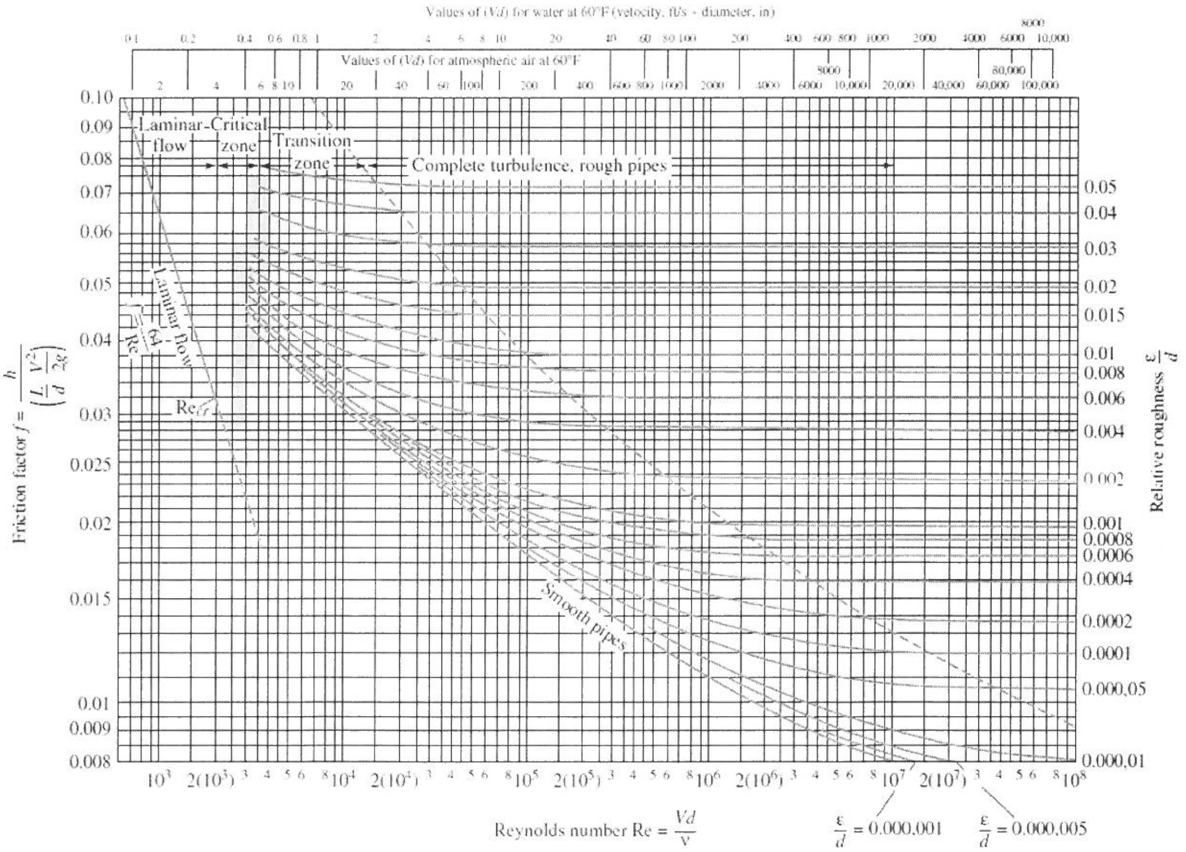
$$D^5 = \frac{8.L.\dot{V}^2}{h_f.g.\pi^2}f = \frac{8\times 10000[pé]\times\left(8{,}93[\frac{pé^3}{s}]\right)^2}{75[\frac{pé.lbf}{lbf}]\times 32{,}2[\frac{pé}{s^2}]\times\pi^2}f \cong 267{,}0.f \quad (1)$$

$$Re = \frac{4.\dot{V}}{\pi.\nu.D} = \frac{4\times 8{,}93[\frac{pé^3}{s}]}{\pi\times 0{,}0001\left[\frac{pé^2}{s}\right]\times D[pé]} \cong \frac{113.800}{D[pé]} \quad (2)$$

Da Tabela de https://www.engineersedge.com/fluid_flow/pipe-roughness.htm:

Pipe Material	Specific Roughness Factor, • , mm (ft)
Steel, welded and seamless	0.061 (0.0002)
Steel. Sheet metal, new	5×10^{-2} (1.6×10^{-4})
Commercial, new	4.6×10^{-2} (1.5×10^{-4})
Steel, Riveted	3.0 (1×10^{-2})
Steel, Rusted	2.0 (7×10^{-3})
Stainless	2×10^{-3} (7×10^{-6})
Ductile Iron	0.061 (0.0002)
Iron, Cast new	2.6×10^{-1} (8.5×10^{-4})
Iron. Wrough, new	4.6×10^{-2} (1.5×10^{-4})
Iron, Galvanized, new	1.5×10^{-1} (5×10^{-4})
Iron, Asphalted, cast	1.2×10^{-1} (4×10^{-4})
Ductile Iron, asphalt coated	0.12 (0.0004)
Copper and Brass	0.61 (0.002)

Do diagrama de Moody → ∈ (material dado = "*Commercial, new*" ou "*Commercial steel*") ≅ 0,00015 [pé] = 1,5 x 10^{-4} [pé] = 4,6 x 10^{-2} [mm]



Se $f = 0{,}02$, o valor de D (da equação (1): $D^5 \cong 267{,}0.f$) = 1,398 [pé]

Para D = 1,398 [pé], Re (da equação (2): $Re \cong \frac{113.800}{D[pé]}$) = 81400, resultando em $\in/D = \frac{0{,}00015\,[pé]}{1{,}398\,[pé]} = 0{,}00011$

Com este Re e $\in/D$ entrando no diagrama de Moody, tem-se $f = 0{,}019$ ou usar COLEBROOK-WHITE: $\frac{1}{\sqrt{f}} = -0{,}86.Ln\left(\frac{\in/D}{3{,}7} + \frac{2{,}51}{Re.\sqrt{f}}\right)$

Repetindo-se o procedimento, D = 1,382 [pé], Re = 82300, f = 0,019 (f não varia mais)

$\therefore$ $\boxed{D = 1{,}382 \times 12 \cong 16{,}6\,[\text{polegada}]}$ Resp.

Nota: Vocês devem verificar os valores numéricos do problema, pois, o livro americano citado aqui tem erros!

Outro método para obter *D*

Segundo SWAMEE e JAIN, uma equação empírica para determinar diretamente o diâmetro, usando relações adimensionais e uma abordagem análoga à dedução da equação de Colebrook-White, fornece

$$D = 0{,}66\left[\in^{1{,}25}\left(\frac{L.\dot{V}^2}{g.h_f}\right)^{4{,}75} + v.\dot{V}^{9{,}4}\left(\frac{L}{g.h_f}\right)^{5{,}2}\right]^{0{,}04} \quad (3)$$

A solução do exercício denominado de "Exemplo 3", usando esta equação com

$\dot{V} = 8{,}93.[\frac{pé^3}{s}]$, $\in = 0{,}00015.[pé]$, $L = 10000.[pé]$, $h_f = 75.[pé]$,
$v = 0{,}0001.[\frac{pé^2}{s}]$ e $g = 32{,}2.[\frac{pé}{s^2}]$

é $\boxed{D = 1{,}404.[pé]}$ Resp.

A equação (3) é válida nos seguintes intervalos:

$$3 \times 10^3 \leq Re \leq 3 \times 10^8 \text{ e } 10^{-6} \leq \in/D \leq 2 \times 10^{-2}$$

e fornecerá um valor de D dentro da variação de 2 % do valor obtido pelo método que usa a equação de Colebrook-White ($\frac{1}{\sqrt{f}} = -0{,}86.Ln\left(\frac{\in/D}{3{,}7} + \frac{2{,}51}{Re.\sqrt{f}}\right)$).

Perda de Carga (Energia) Localizada ou Singular

As perdas que ocorrem em condutos devido a curvas, cotovelos, juntas, válvulas etc. são chamadas perdas localizadas ou singulares e determinadas experimentalmente. Entretanto, uma exceção importante é a perda de carga devida a uma expansão ou contração brusca de seção num conduto que pode ser determinada analiticamente.

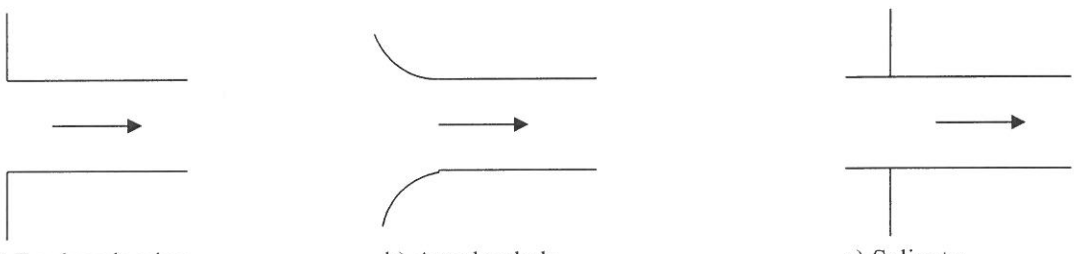
As perdas localizadas ou singulares, de um modo geral, são obtidas através da expressão:

$$h_f = k\frac{V^2}{2.g} \quad (6.2.9.)$$

onde k é um coeficiente obtido experimentalmente para cada caso, conforme indica a Tabela 1 e Figura 6.2 abaixo.

Tabela 1: Coeficiente k de perda de carga para várias conexões.

Conexões	k
Válvula globo (totalmente aberta)	10,0
Válvula angular (totalmente aberta)	5,00
Válvula de retenção (totalmente aberta)	2,5
Válvula de gaveta (totalmente aberta)	0,19
Curva de raio curto	2,2
Tê comum	1,8
Cotovelo comun	0,9
Cotovelo de raio médio	0,75
Cotovelo de raio longo	0,60



a) Em ângulo vivo $k = 0,5$ b) Arredondado $k = 0,01 - 0,05$ c) Saliente $k = 0,8 - 1,0$

Fig. 6.2 - Coeficiente de perda de carga k para entrada em um tubo.

Também é bastante usual substituir a perda localizada por uma perda equivalente em um conduto. A equação de DARCY-WEISBACH para o comprimento equivalente fica:

$$h_f = f\frac{L_e}{D}\frac{V^2}{2.g} \quad (6.3.0.)$$

Igualando as equações $h_f = k\frac{V^2}{2.g}$ (6.2.9.) e $h_f = f\frac{L_e}{D}\frac{V^2}{2.g}$ (6.3.0.) tem-se,

$L_e = \frac{K.D}{f}$ (6.3.1.)

Para se calcular a perda de carga em uma tubulação com perdas distribuidas e localizadas, basta usar a seguinte equação:

$$\boxed{h_f = f \cdot \left(\frac{L+L_e}{D}\right) \cdot \frac{V^2}{2.g} \quad \text{onde } L_e = \frac{K.D}{f}} \quad (6.3.2.)$$

ou alternativamente

$$h_f = f\underbrace{\frac{L}{D}\frac{V^2}{2.g}}_{\text{distribuidas}} + \underbrace{\sum K\frac{V^2}{2.g}}_{\text{localizadas}}$$

Exemplo típico de problemas que envolvem perda de carga total:

Exemplo 4

Água escoa de um grande reservatório e descarrega na atmosfera da forma mostrada na Fig. 1 (abaixo). Determinar a vazão em $[\frac{pés^3}{s}]$. Dados: k_1 = coeficiente de perda para entrada arredondada = 0,25, k_2 = coeficiente de perda para curva de 90° = 0,90 , viscosidade cinemática do fluido igual a $\nu = 1 \times 10^{-5}$ [pé²/s], rugosidade igual a $\in = 0{,}00015\ [pés]$; diâmetro do tubo igual a D = 6 [polegadas] = 0,5 [pé]. Hipótese: $P_2 = P_S$ e $V_S \cong 0$. *A*dota-se: $V_1 = V_2 = V$.

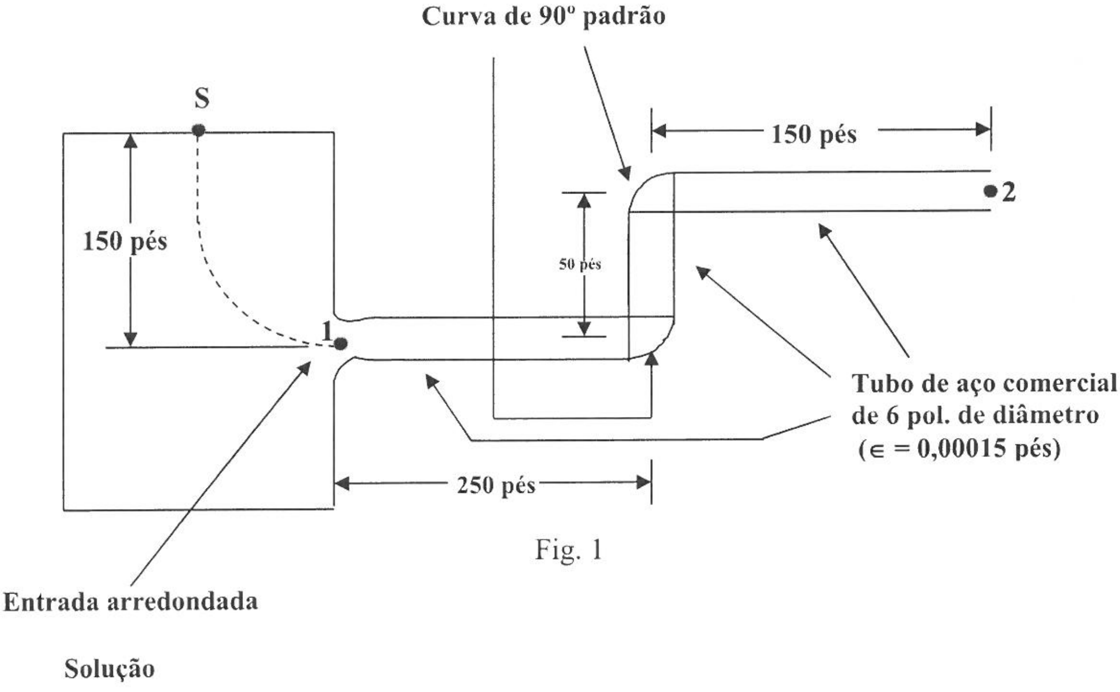


Fig. 1

Solução

Inicialmente, escrevemos a equação de Bernoulli entre a superfície livre (S) e a entrada (1):
Em seguida $V_1 = V_2 = V$ com $Vs \cong 0$.

$$\frac{P_S}{\gamma} + \frac{V_S{}^2}{2.g} + z_S = \frac{P_1}{\gamma} + \frac{V_1{}^2}{2.g} + z_1$$

ou $$\frac{P_1 - P_S}{\gamma} = z_S - z_1 - \frac{V_1{}^2}{2.g} \qquad \therefore \quad Vs \cong 0$$

$$\therefore \quad \boxed{\frac{P_1 - P_S}{\rho.g} = z_S - z_1 - \frac{V^2}{2.g}} \qquad (1)$$

Depois, escrevemos a equação da energia entre as seções 1 e 2 (incluindo todas as perdas):

$$\frac{P_1}{\gamma = \rho g} + \cancel{\frac{V_1{}^2}{2.g}} + z_1 = \frac{P_2}{\gamma = \rho g} + \cancel{\frac{V_2{}^2}{2.g}} + z_2 + h_{f.d} + h_{f.\ell}$$

onde: $h_{f.d}$ = perda de carga distribuída;

$h_{f.\ell}$ = perda de carga localizada.

Mas $\boxed{V_1 = V_2}$

$$\therefore \quad \boxed{\frac{P_1 - P_2}{\rho.g} = (z_2 - z_1) + f\,\frac{L}{D}\frac{V^2}{2.g} + k_1\frac{V^2}{2.g} + 2.k_2\frac{V^2}{2.g}} \qquad (2)$$

onde k_1 = coeficiente de perda de carga para entrada arredondada = 0,25, k_2 = coeficiente de perda para curva de 90° = 0,90 (2 curvas).

Combinando as duas equações ($\frac{P_1 - P_S}{\rho.g} = z_S - z_1 - \frac{V^2}{2.g}$ e $\frac{P_1 - P_2}{\rho.g} = (z_2 - z_1) + f\,\frac{L}{D}\frac{V^2}{2.g} + k_1\frac{V^2}{2.g} + 2.k_2\frac{V^2}{2.g}$) e admitindo que $P_2 = P_s$, temos

$$\left(f\,\frac{L}{D} + k_1 + 2.k_2 + 1\right)\frac{V^2}{2.g} = z_S - z_2$$

ou $$\boxed{V^2 = \frac{2.g(z_S - z_2)}{f\frac{L}{D} + k_1 + 2.k_2 + 1}} \qquad (3)$$

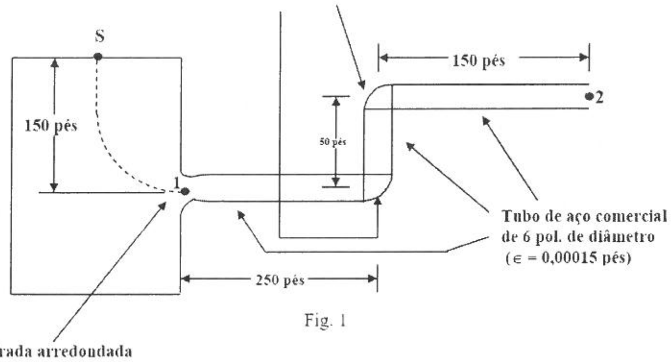


Fig. 1

Aqui g = 32,2 [pés/s^2], $z_s - z_2$ = 150 –50 = 100 [pés], L = 250 + 50 + 150 = 450 [pés] , D = 6/12 = $\frac{1}{2}$ [pé], k_1 = 0,25 , k_2 = 0,90, resulta em :

$$V^2 = \frac{2.g(z_s - z_2)}{f\frac{L}{D} + k_1 + 2.k_2 + 1} \therefore \quad V^2 = \frac{2.32,2\cdot(100)}{f\cdot\left(\frac{450}{0,5}\right) + 0,25 + 2\cdot(0,90) + 1}$$

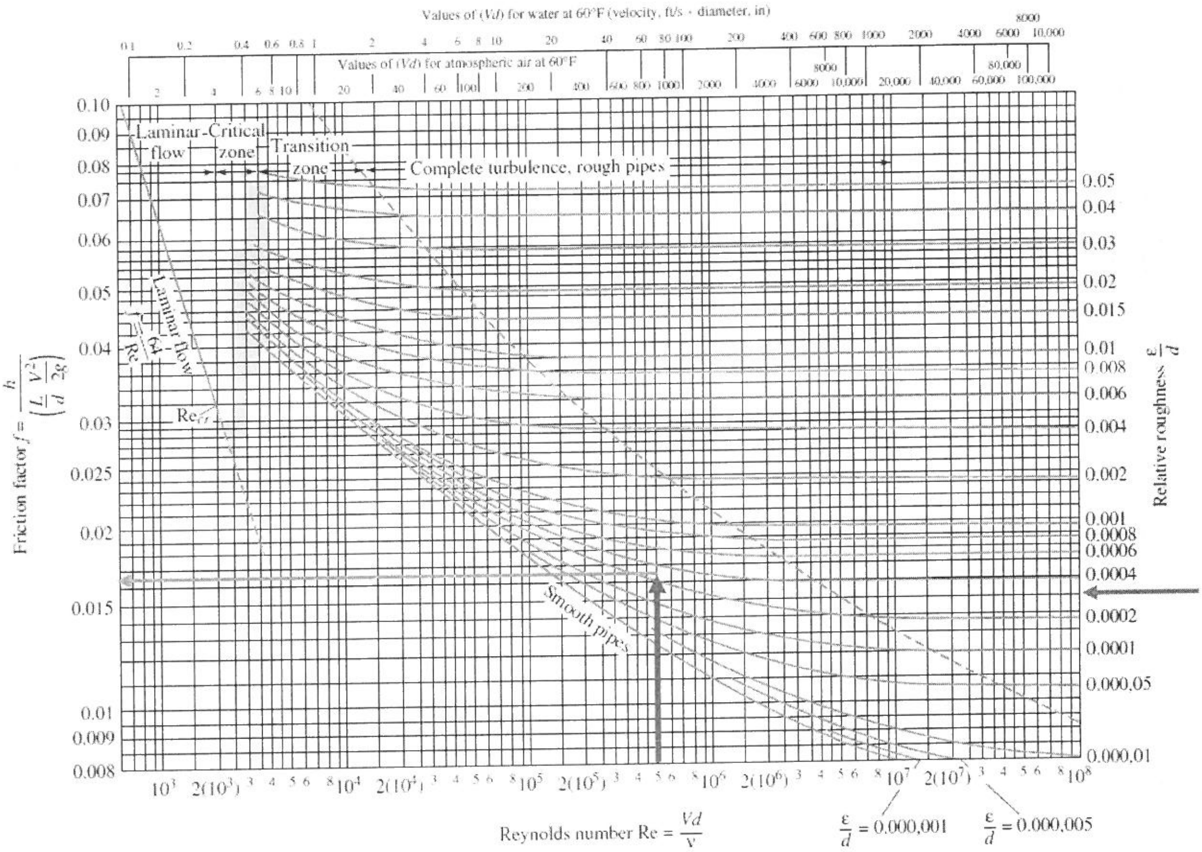
ou $\boxed{V^2 = \frac{6440}{f.(900) + 3,05}}$ (4)

Do número de Reynolds Re, vem que :

$$\boxed{Re = \frac{V.D}{\upsilon} = \frac{V(1/2)}{1 \times 10^{-5}} = 5 \times 10^4.V} \quad (5)$$

e $\in/D = \frac{0,00015\ [pés]}{1/2[pé]} = 0,00030$

Como f e V são desconhecidos, trabalhamos simultaneamente com o diagrama de MOODY (ou equação analítica) para obtermos uma solução.



V(admitida)	Re (Eq. 5: $Re = 5 \times 10^4 . V$)	f (diagrama)	V (calculada, Eq. 4: $V^2 = \frac{6440}{f.(900)+3,05}$)
10	5×10^5	0,0165	361
370	$1,85\times10^7$	0,0150	390
390	$1,95\times10^7$	0,0150	390

Achamos V = 390 [pés/s] , com $\in/D = \frac{0,00015\ [pés]}{1/2[pé]} = 0,00030$ e $\dot{V} = A.V = \frac{\pi.D^2}{4}.V = \frac{1}{4}\pi(1/2)^2(390)$

$\therefore$ $\boxed{\dot{V} = 76,6. [\frac{pés^3}{s}]}$ Resp.

8º Lista de exercícios

Questão 1

O que é perda de carga?

Questão 2

Explique perda de carga distribuída e localizada.

Questão 3

Como perda de carga depende em um escoamento turbulento?

Questão 4

Refazer o Ex3 no sistema Internacional. Determinar o diâmetro D de tubo de aço comercial (*commercial steel*) necessário para transportar 4000 [gpm] (galão por minuto) (252 [ℓ/s]) de óleo, $\nu = 0{,}0001$ [pé²/s] (0,00001 [m²/s]) à distância de 10 000 [pé] (3048 [m]) com uma perda de carga h_f de $75[\frac{pé.lbf}{lbf}]$ $\left(22{,}8.[m\frac{Kgf}{Kgf}]\right)$.

Questão 5

Refazer o Ex1 corretamente e verificar os dados numéricos calculados. Determinar a perda de carga (energia) para o escoamento de 140 [ℓ/s] de óleo, $\nu = 0{,}00001$ [m²/s], num tubo de ferro fundido de 400 [m] de comprimento e 200 [mm] de diâmetro.

Questão 6

Refazer o Ex2 usando a equação de Colebrook-White. Água a 15 [ºC] escoa num tubo de aço rebitado de 300 [mm] de diâmetro, $\in = 3$ [mm], com uma perda de carga de $h_f = 6$ [m] em 300 [m]. Calcular a vazão volumétrica $\dot{V}$ em [m³/s].

Questão 7

Refazer o Ex4 no S.I. Água escoa de um grande reservatório e descarrega na atmosfera da forma mostrada na Fig. 1 (abaixo). Determinar a vazão em $[\frac{pés^3}{s}]$. Dados: k_1 = coeficiente de perda para entrada arredondada = 0,25, k_2 = coeficiente de perda para curva de 90º = 0,90 , viscosidade cinemática do fluido igual a $\nu = 1 \times 10^{-5}$ [pé²/s], rugosidade igual a $\in = 0{,}00015\ [pés]$; diâmetro do tubo igual a D = 6 [polegadas] = 0,5 [pé]. Hipótese: $P_2 = Ps$ e $Vs \cong 0$. *A*dota-se: $V_1 = V_2 = V$.

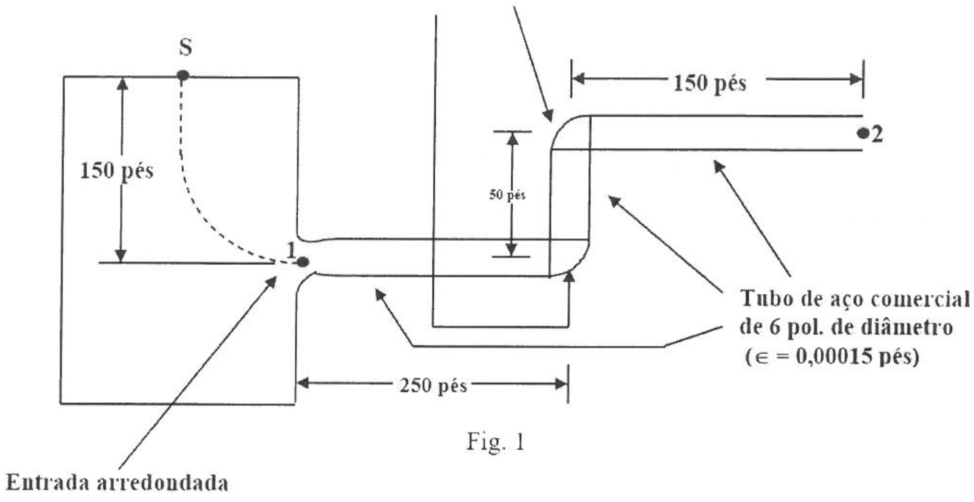
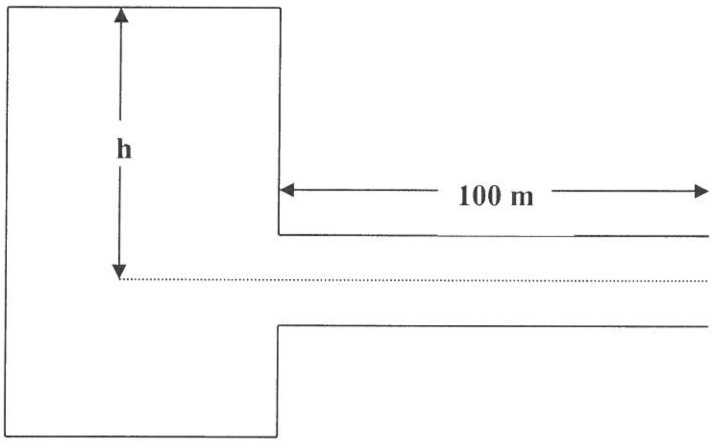


Fig. 1

Questão 8

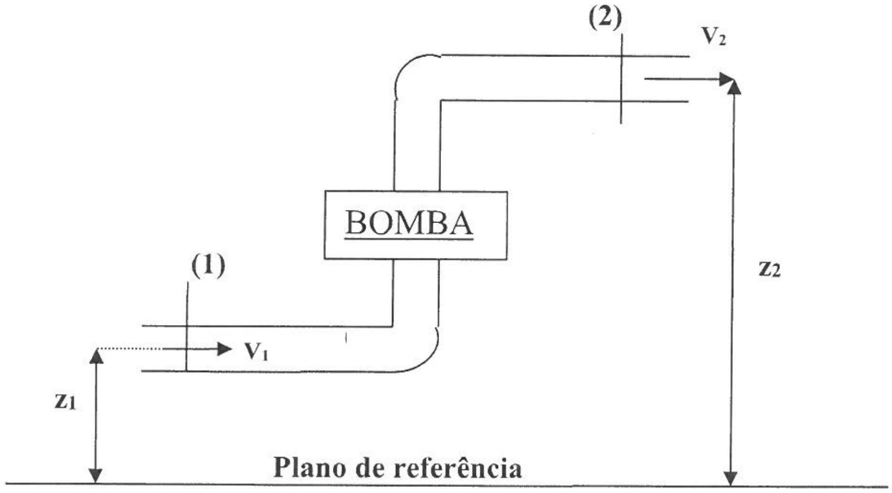
Qual o nível, h, que deve ser mantido no reservatório para produzir uma vazão volumétrica de 0,03 [m^3/s] de água? O diâmetro interno do cano liso é de 75 [mm] e o comprimento é de 100 [m]. O coeficiente de perda, k, para a entrda é $k = 0,5$. A água é descargada para a atmosfera.



Resp: $h \cong 44,6$ m

Questão 9

A vazão de 1,44 [m^3/s] de água ocorre em uma instalação (Fig.1 abaixo), contendo uma bomba fornece 400 [CV] de energia à corrente líquida. São dados:
$A_1 = 0{,}36$ [m^2] , $A_2 = 0{,}18$ [m]^2 , $z_1 = 9{,}15$ [m] , $z_2 = 24{,}4$ [m], $(P_1/\gamma) = 14$ [mca] e $(P_2/\gamma) = 7$ [mca]



Calcular a perda de carga entre as seções (1) e (2)

Resp. $h_f \cong 10{,}18$ [m]

(Fig.1)

Última página

Questão 10

Água escoa através da turbina na Figura 2 (abaixo). A turbina produz a potência de 65,0 [HP] = 48.470,49 [$W_{mecânico}$] = 48.490,0 [$W_{elétrico}$]. As pressões em A e B são 1,4 [kgf/cm^2] = 1,4 x 10^4 [kgf/m^2] = 137.293,1 [Pa] e –0,34 [kgf/cm^2] = 3,4 x 10^3 [kgf/m^2] = 33.342,61 [Pa], respectivamente. Qual é a vazão volumétrica d'água em [m^3/s]? Desprezar a perda de carga devida ao atrito.

Dado: $\gamma_{H2O} = 10^3\ [\frac{kgf}{m^3}]$, 1,0 [kgf] = 9,80665 [N].

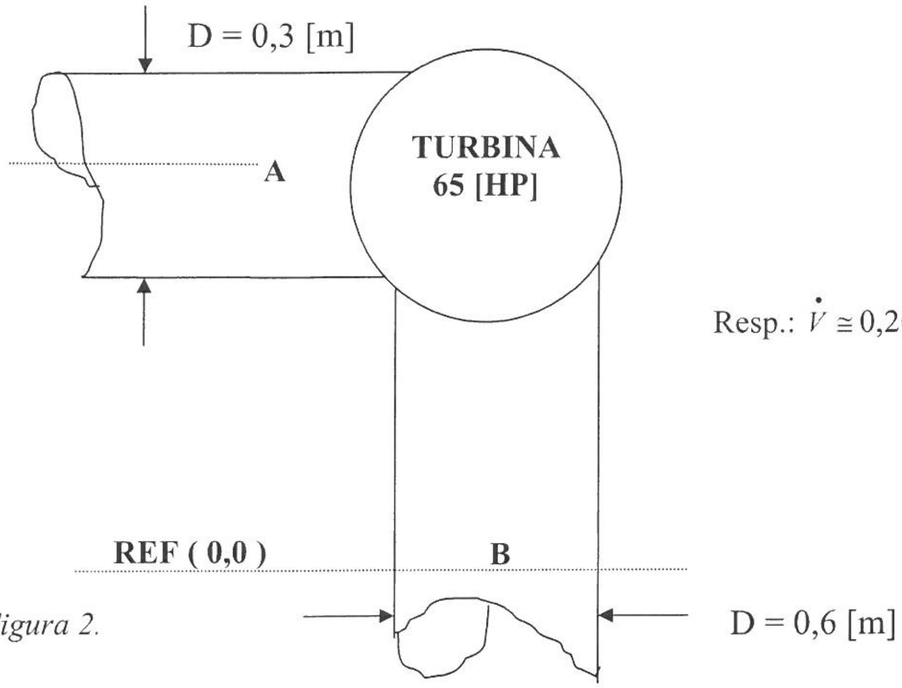


Figura 2.

Resp.: $\dot{V} \cong 0{,}260$ [m^3/s]